# Nota sobre la part històrica

La informació de les olimpíades que es presenta en aquest nou format és la mateixa que la d'edicions anteriors amb l'afegit de les últimes. Malauradament, les llacunes que teníem encara es mantenen: ens falten cinc problemes de l'Olimpíada II, primera fase (1964-65); i un problema de l'Olimpíada VI, primera fase (1968-69). En el lloc corresponent hi hem posat, de moment, uns enunciats que tenen alguna probabilitat de ser els correctes, però que estan pendents de confirmació. Tots ells estan marcats amb un $*$.

Les llistes de guanyadors són completes *excepte* les que corresponen a les primeres fases de les Olimpíades XVI (1978-79) i XX (1983-84). D'aquests anys no en queda cap constància a la SCM, i així està indicat al lloc corresponent.

La Societat Catalana de Matemàtiques demana a qualsevol persona que hagi tingut relació amb alguna de les Olimpíades II, VI, XVI i XX, tant si ha estat guanyador com participant o professor, i que en tingui informació, que s'adreci a la Societat i li faci arribar. Aquesta sol·licitud es fa extensiva a tothom que tingui documents, cartes de notificació, fulls d'enunciats, etc., de qualsevol Olimpíada de la I a la XXX. La SCM agrairà totes les informacions que l'ajudin a reconstruir els arxius de les Olimpíades.

La col·lecció d'enunciats i guanyadors que figura en aquest llibret té diversos orígens. Els principals són:

1) La *Gaceta Matemática* de la *Real Sociedad Matemática Española* que publicava, cada any, les llistes de guanyadors per districtes i de la segona fase. Malgrat tot, la col·lecció s'estroncà defintivament l'any 1982, i en alguns anys anteriors la informació era incompleta. Els enunciats dels problemes també hi figuraven, però els tribunals locals de la primera fase podien canviar-los, i ha calgut confirmar bastants casos dubtosos.

2) La col·lecció personal de problemes del professor Bellot, que ha permès prosseguir des d'on acabà la Gaceta Matemàtica. Aquests problemes, confirmats per fulls d'enunciats repartits a les proves i que s'han pogut aconseguir, han permès tenir tots els enunciats de la segona fase i alguns de la primera que faltaven en els anys 1978-1984. També ens ha proporcionat dades sobre la participació de concursants espanyols a les Olímpiades Internacionals i Iberoamericanes. Cal dir una vegada més que les informacions aportades per Francisco Bellot han estat cabdals des del principi de les edicions d'aquests llibres.

3) Els fulls de problemes repartits amb logotip de la Societat, conservats per Antoni Gomà, o els Fulls Informatius i Memòries de la SCM, han permès establir els enunciats de la primera fase dels anys 1985-1992. També n'han sortit noms de guanyadors, però amb les llacunes esmentades i encara no aclarides.
4) La informació contiguda a les resolucions de la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio del Ministerio de Educación y Cultura on hi ha els noms dels estudiants que han tingut beca d'estudis olímpica, o bé premi en metal·lic. Aquestes dades han estat valuoses per a completar les llistes de guanyadors de determinats anys i confirmar altres fonts.
5) La informació verbal que ens ha proporcionat la professora María Gaspar Alonso-Vega, de Madrid, que va ser acompanyant dels primers equips espanyols a les Olimpíades Internacionals i Iberoamericanes.
6) Les informacions escrites o verbals de moltes persones que en algun moment han tingut relació amb les Olimpíades. Encara que sigui a costa d'oblidar-ne alguna, cosa de la qual en demanem disculpes, esmentem: Josep Burillo Puig, Joan Elias García, Fernando Etayo Gordejuela, Jaume Lluís García Roig, Josep Gelonch Anyé, Fernando Herrero Buj, Santiago Manrique Catalán, Daniel Marquès Solé, Fco. Javier Martínez de Albéniz Salas, Ramon Masip Treig, Josep M. Mondelo González, Ignasi Mundet Riera, Vicente Muñoz Velázquez, Teresa Novelle Saco, Antoni Oliva Cuyàs, Antoni Ras Sabidó, Roberto Selva Gómez, Josep Oriol Solé Subiela, Olga Tugues, Gerald Welters Dyhdalewicz, etc.

La Societat Catalana de Matemàtiques dóna les gràcies a tothom que ha ajudat a completar aquesta petita història de les Olimpíades de matemàtiques i no dubta que podrà aconseguir, algun dia, les dades que li manquen.

Josep Grané Manlleu

# GUANYADORS DE LES DARRERES OLIMPÍADES

# Curs 2003-04

# XL Olimpíada Matemàtica

*Primera Fase (Catalunya)*

*Primers premis*

| | |
|---|---|
| Joaquim Serra Montolí | IES La Sedeta (Barcelona) |
| Albert Aguadé Borrull | Salesians S. Joan Bosco (Barcelona) |
| Maria Ibáñez Alonso | Aula Escola Europea (Barcelona) |

*Segons premis*

| | |
|---|---|
| Guillermo Vilaplana Muller | Lycée Français (Barcelona) |
| Robert Fiallos Masó | IES La Sedeta (Barcelona) |
| Ainhoa Manterola Solans | Aula Escola Europea (Barcelona) |

*Tercers premis*

| | |
|---|---|
| Miguel Teixidó Román | Col·legi Claver (Lleida) |
| Enric Martínez Sala | Aula Escola Europea (Barcelona) |
| Alberto Camacho Martínez | IES Joanot Martorell (Esplugues de Llobregat) |

*Segona Fase (Espanya), medalles d'or*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Joaquim Serra Montolí | (Barcelona) |
| 2 | Maite Peña Alcaraz | (Sevilla) |
| 3 | Elisa Lorenzo García | (Madrid) |
| 4 | Miguel Teixidó Román | (Lleida) |
| 5 | Francisco Javier Hernández Heras | (Valladolid) |
| 6 | María Isabel Cordero Marcos | (Salamanca) |

## Curs 2003-04

## 45th International Mathematical Olympiad

## Atenes, Grècia

Espanya a quedar al lloc 55 per països.

Els concursants espanyols van obtenir: Maite Peña, *medalla de bronze*, i Joaquim Serra, Francisco J. Hernández, i María Isabel Cordero *menció honorífica*.

---

# Curs 2002-03
# XXXIX Olimpíada Matemàtica

*Primera Fase (Catalunya)*

*Primers premis*

| | |
|---|---|
| Daniel Rodrigo López | IES Montserrat Miró (Montcada i Reixac) |
| Joaquim Serra Montolí | IES La Sedeta (Barcelona) |
| Matías Javier Wartelski Pryluka | Lycée Français (Barcelona) |

*Segons premis*

| | |
|---|---|
| Carles Sala Cladellas | IES Sant Quirze (Sant Quirze del Vallès) |
| Xavier Roca Artola | Aula Escola Europea (Barcelona) |
| Anna Sabaté Vidales | Aula Escola Europea (Barcelona) |

*Tercers premis*

| | |
|---|---|
| Arnau Padrol Sureda | IES Menéndez y Pelayo (Barcelona) |
| Carles Solano Molins | Institució Cultural del CIC (Barcelona) |

*Segona Fase (Espanya), medalles d'or*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Daniel Rodrigo López | (Montcada i Reixac, Barcelona) |
| 2 | Luis Hernández Corbato | (Madrid) |
| 3 | Mohammed Blanca Ruiz | (Manises, Valencia) |
| 4 | Víctor González Alonso | (Briviesca, Burgos) |
| 5 | Javier Gómez Serrano | (Madrid) |
| 6 | Maite Peña Alcaraz | (Sevilla) |

# Curs 2002-03

# 44th International Mathematical Olympiad

# Tokyo, Japó

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 457 participants de 82 països):

| | |
|---|---|
| *Xina, 1:* | Yunhao Fu |
| *Vietnam, 2:* | Hung Viet Bao Le, Trong Cahn Nuyen |

Tots els integrants de l'equip de Bulgària van obtenir medalla d'or. Espanya va quedar al lloc 46 per països. Els concursants espanyols van obtenir: Víctor González, *medalla de bronze*, i Daniel Rodrigo, Luis Hernández, Mohammed Blanca i Maite Peña *menció honorífica*.

---

# XVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

# Mar del Plata, Argentina

Resultats dels concursants espanyols: Luis Hernández, *medalla de plata*, Maite Peña i Daniel Rodrigo, *medalles de bronze* i Víctor González, *menció honorífica*.

# Curs 2001-02

# XXXVIII Olimpíada Matemàtica

*Primera Fase (Catalunya)*

*Primers premis*

| | |
|---|---|
| Sergio Millán López | IES Santa Eulàlia (L'Hospitalet de Llobregat) |
| Pau Curell Sanmartí | Aula Escola Europea (Barcelona) |
| Daniel Rodrigo López | IES Montserrat Miró (Montcada i Reixac) |

*Segons premis*

| | |
|---|---|
| Elsa de Alfonso Prieto-Puga | Aula Escola Europea (Barcelona) |
| Albert Llorens Martínez | Col·legi Vidal i Barraquer (Sabadell) |
| Patricia Ceballos Carrascosa | Institució Cultural del CIC (Barcelona) |

*Tercers premis*

| | |
|---|---|
| Raül Vinyes Raso | Aula Escola Europea (Barcelona) |
| Ignasi Abío Roig | Col·legi Bell-lloc del Pla (Girona) |
| Anna Papió Toda | IES Joan Guinjoan (Riudoms) |

*Segona Fase (Espanya), medalles d'or*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Daniel Rodrigo López | (Montcada i Reixac, Barcelona) |
| 2 | Luis Hernández Corbato | (Madrid) |
| 3 | Sergio Millán López | (L'Hospitalet de Llobregat, Barcelona) |
| 4 | David García Soriano | (Madrid) |
| 5 | Susana Ladra González | (Teo, A Coruña) |
| 6 | José Miguel Manzano Prego | (Motril, Granada) |

# Curs 2001-02

# 43rd International Mathematical Olympiad

# (Glasgow, UK)

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 471 presentats de 84 països):

| | |
|---|---|
| *Xina, 2:* | Yunhao Fu, Botong Wang |
| *Rússia, 1:* | Andrei Khaliavine |

Tots els integrants dels equips de Xina i Rússia van obtenir medalla d'or. Espanya va quedar al lloc 60 per països. Els concursants espanyols van obtenir: Luis Hernández, *medalla de bronze*, i Sergio Millán *menció honorífica*.

---

# XVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

# San Salvador, El Salvador

Resultats dels concursants espanyols; Sergio Millán, Daniel Rodrigo i José Miguel Manzano, *medalles de plata*.

# Curs 2000-01

# XXXVII Olimpíada Matemàtica

*Primera Fase (Catalunya)*

*Primers premis*

| | |
|---|---|
| Maria Saumell Mendiola | IES Lluís de Requesens (Molins de Rei) |
| Francesc Fité Naya | Escola Joan Pelegrí (Barcelona) |
| Miquel Oliu Barton | Aula Escola Europea (Barcelona) |

*Segons premis*

| | |
|---|---|
| Martí Prats Soler | IES Montserrat (Barcelona) |
| Roc Maymó Camps | Institució Cultural del CIC (Barcelona) |
| Artur Latorre Musoll | IES Guillem de Berguedà (Berga) |

*Tercers premis*

| | |
|---|---|
| Sergio Millán López | IES Santa Eulàlia (L'Hospitalet de Llobregat) |
| Joaquim Cevallos Morales | Aula Escola Europea (Bercelona) |
| Pedro Valero Lanau | Lycée Français (Bercelona) |

*Segona Fase (Espanya), medalles d'or*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Javier Cóppola Rodríguez | (Madrid) |
| 2 | Martí Prats Soler | (Barcelona) |
| 3 | Luis Hernández Corbato | (Madrid) |
| 4 | Sergio Millán López | (L'Hospitalet de Llobregat, Barcelona) |
| 5 | Ignacio Cascudo Pueyo | (Oviedo) |
| 6 | Miquel Oliu Barton | (Barcelona) |

J. Cóppola no té nacionalitat espanyola i no pot participar a la 42nd IMO amb l'equip espanyol. Hi participa el guanyador de la primera medalla de plata, Joaquim Cevallos Morales (Barcelona).

# Curs 2000-01

# 42nd International Mathematical Olympiad (Washington DC, USA)

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 476 presentats de 83 països):

| | |
|---|---|
| *Xina, 2:* | Liang Xiao, Zhigiang Zhang |
| *Estats Units, 2:* | Reid Barton, Gabriel Carroll |

Els concursants espanyols van obtenir: Luis Hernández, *medalla de bronze*, i Joaquim Cevallos i Miquel Oliu, *menció honorífica*.

---

# XVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Minas, Uruguay

Resultats dels concursants espanyols: Luis Hernández, *medalla d'or;* Alberto Suárez (guanyador de medalla d'or de la XXXVI OME), *medalla de bronze*.

# Curs 1999-2000

# XXXVI Olimpíada Matemàtica

*Primera Fase (Catalunya)*

*Primers premis*

| | |
|---|---|
| Jordi Rius Pascual | IES Antoni Torroja (Cervera) |
| Stephan Lesaffre | Lycée Français (Bercelona) |
| Miquel Oliu Barton | Aula Escola Europea (Barcelona) |

*Segons premis*

| | |
|---|---|
| Xavier Martínez Palau | IES Torras i Bages (L'Hospitalet de Llobregat) |
| Juanjo Rué Perna | IES Samuel Gili i Gaya (Lleida) |
| Joan Alemany Flos | Aula Escola Europea (Barcelona) |

*Tercers premis*

| | |
|---|---|
| Fabrice Lesaffre | Lycée Français (Bercelona) |

*Segona Fase (Espanya), medalles d'or*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Carlos Gómez Rodríguez | (Santiago de Compostela) |
| 2 | Luis Emilio García Martínez | (València) |
| 3 | Alberto Suárez Real | (Salinas, Asturias) |
| 4 | José María Cantarero López | (Ronda, Málaga) |
| 5 | Manuel Pérez Molina | (Alacant) |
| 6 | Roberto Rubio Núñez | (València) |

# Curs 1999-2000

# 41st International Mathematical Olympiad

# (Taejon, Corea del Sud)

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 451 presentats):

| | |
|---|---|
| *Bulgaria, 1:* | Alexandr Usnich |
| *Xina, 1:* | Zhiwei Yun |
| *Rússia, 2:* | Alexei Poiarkov, Alexandre Gaifoulline |

El concursant espanyol José María Cantarero va obtenir menció honorífica.

---

# XV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

# Caracas, Venezuela

Resultats dels concursants espanyols: Alberto Suárez, José M. Cantarero i Luis Emilio García, *medalles de plata*; Carlos Gómez, *medalla de bronze*.

# Curs 1998-99

# XXXV Olimpíada Matemàtica

*Primera Fase (Catalunya)*

*Primers premis*

| | |
|---|---|
| Edgar González Pellicer | Col·legi Mares Concepcionistes (Barcelona) |
| Joaquim Molera Vidal | IES Lluís de Peguera (Manresa) |
| Darío Mora Portela | IES Barcelona-Congrés (Barcelona) |

*Segons premis*

| | |
|---|---|
| M. Vinyes | Aula Escola Europea (Barcelona) |
| Pere Menal Ferrer | Centre d'Estudis Vidal i Barraquer (Sabadell) |
| Óscar Barenys García | IES Salvador Vilaseca (Reus) |

*Tercers premis*

| | |
|---|---|
| Fèlix Llopart Miquel | Col·legi Sant Josep (Sant Sadurní d'Anoia) |
| Domènec Martín Martínez | IES Alt Penedès (Vilafranca del Penedès) |

*Segona Fase (Espanya), medalles d'or*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Ramón José Aliaga Varea | (Mislata, València) |
| 2 | Andrés Tallos Tanarro | (Madrid) |
| 3 | Enrique Vallejo Gutiérrez | (Bilbao) |
| 4 | Álvaro Navarro Tobar | (Madrid) |
| 5 | Javier Múgica de Ribera | (Santiago de Compostela) |
| 6 | Néstor Sancho Bejarano | (Béjar, Salamanca) |

# Curs 1998-99

# 40th International Mathematical Olympiad

# (Bucarest, Romania)

Concursants amb puntuació màxima de 39 punts sobre 42 (de 450 presentats):

| | |
|---|---|
| *Hongria, 1:* | Tamás Terpai |
| *Romania, 1:* | Stefan Laurentiu Hornep |
| *Ucraïna, 1:* | Maksym Fedorchuk |

Els concursants espanyols Ramón J. Aliaga i Javier Múgica van obtenir, respectivament, medalla de bronze i menció honorífica.

---

# XIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

# La Habana, Cuba

Resultats dels concursants espanyols: Ramón José Aliaga, Álvaro Navarro i Javier Múgica, *medalles de plata*; Néstor Sancho, *medalla de bronze.*

# Curs 1997-98
# XXXIV Olimpíada Matemàtica

*Primera Fase (Catalunya)*

*Primers premis*

| | |
|---|---|
| Marc Martínez de Albéniz Margalef | Liceu Francès (Barcelona) |
| Lluís Acero Sistach | IES Menéndez y Pelayo (Barcelona) |
| Xavier Gratal Martínez | IES Màrius Torres (Lleida) |

*Segons premis*

| | |
|---|---|
| Edgar González Pellicer | Col·legi Mares Concepcionistes (Barcelona) |
| Aniol Llorente Saguer | IES Jaume Vicens Vives (Girona) |
| Àngel Faus Tomás | Col·legi Bell-lloc del Pla (Girona) |

*Tercers premis*

| | |
|---|---|
| Eduard Viladesau Franquesa | Aula Escola Europea (Barcelona) |
| Antoni Conejero Cárceles | IES Jaume Vicens Vives (Girona) |

*Segona Fase (Espanya), medalles d'or*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Mario Andrés Montes García | (Salamanca) |
| 2 | Ramón José Aliaga Varea | (Mislata, València) |
| 3 | David Martín Calva | (Saragossa) |
| 4 | María Pe Pereira | (Burgos) |
| 5 | Beatriz Sanz Merino | (Madrid) |
| 6 | Jaime Vinuesa del Rio | (Valladolid) |

# Curs 1997-98

# 39th International Mathematical Olympiad

# (Taipei, Taiwan)

Concursant amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 419 presentats):

*Iran, 1:* Omid Amini

Els concursants espanyols Jaime Vinuesa i Mario Andrés Montes van obtenir, respectivament, medalla de bronze i menció honorífica.

---

# XIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

# Puerto Plata, República Dominicana

Resultats dels concursants espanyols: Ramón José Aliaga i Mario Andrés Montes, *medalles de plata*; María Pe i Jaime Vinuesa, *medalles de bronze*.

# Curs 1996-97

# XXXIII Olimpíada Matemàtica

*Primera Fase (Catalunya)*

| | |
|---|---|
| *Primer premi* | |
| Xavier Pérez Giménez | IB Joan Boscà (Barcelona) |
| *Segon premi* | |
| Max Bernstein Obiols | Aula Escola Europea (Barcelona) |
| *Tercer premi* | |
| Xavier Gratal Martínez | IB Màrius Torres (Lleida) |

*Segona Fase (Espanya), medalles d'or*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Anatoli Segura Vélez | (Baza, Granada) |
| 2 | Miguel Lobo López | (Martos, Jaén) |
| 3 | Mario Andrés Montes García | (Salamanca) |
| 4 | Max Bernstein Obiols | (Barcelona) |
| 5 | Joseba Villate Bejarano | (Algorta, Biscaia) |
| 6 | Xavier Pérez Giménez | (Barcelona) |

Sergi Elizalde Torrent va participar-hi, fora de concurs, ja que per edat podia tornar a concursar a la *XII Olimpíada Iberoamericana*. Va obtenir la puntuació més alta de tots els concursants, i va tenir dues mencions especials per la qualitat de la resolució de dos problemes.

# Curs 1996-97

# 38th International Mathematical Olympiad

# (Mar del Plata,Argentina)

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 460 presentats):

| | |
|---|---|
| *Romania, 1:* | Ciprian Manolescu |
| *USA, 1:* | Carleton Bosley |
| *Iran, 1:* | Eaman Eftekhari |
| *Vietnam, 1:* | Do Quoc Anh |

---

# XII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

# Guadalajara (Jalisco), Mèxic

Resultats dels concursants espanyols: Sergi Elizalde, *medalla de plata*; Miguel Lobo, Mario Andrés Montes i Xavier Pérez, *medalles de bronze* cada un.

## Curs 1995-96

## XXXII Olimpíada Matemàtica

*Primera Fase (Catalunya)*

*Primers premis*

| | |
|---|---|
| Edgar Güeto de la Rosa | IB Torras i Bages (L'Hospitalet de Llobregat) |
| Víctor Martínez de Albéniz Margalef | Lycée Français (Barcelona) |
| Raúl Martín Álvarez | IB Maragall (Barcelona) |

*Segons premis*

| | |
|---|---|
| Joel Gabàs Masip | IB Mixt Núm. 4 (Lleida) |
| Lluís Tarafa Mate | Lycée Français (Barcelona) |
| Sergi Elizalde Torrent | IB Arnau Cadell (Sant Cugat del Vallès) |

*Tercers premis*

| | |
|---|---|
| Max Bernstein Obiols | Aula Escola Europea (Barcelona) |
| Diego Pozo Tortosa | IES Doctor Puigvert (Barcelona) |

*Segona Fase (Espanya), medalles d'or*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Sergi Elizalde Torrent | (Sant Cugat del Vallès, Barcelona) |
| 2 | Tomás Palacios Gutiérrez | (Madrid) |
| 3 | Fernando Rambla Barreno | (Cádiz) |
| 4 | Antonio Jara de las Heras | (Jaén) |
| 5 | Patricia Sebastián Celorrio | (Zaragoza) |
| 6 | Víctor Martínez de Albéniz Margalef | (Barcelona) |

# Curs 1995-96

# 37th International Mathematical Olympiad

# (Bombay, India)

Concursant amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 424 presentats):

*Romania, 1:* Ciprian Manolescu

El concursant espanyol Sergi Elizalde Torrent obté *menció honorífica*.

---

# XI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

# San José, Costa Rica

Els concursant espanyols Sergi Elizalde, Antonio Jara, Víctor Martínez de Albéniz i Fernando Rambla obtenen *medalla de bronze*.

# Curs 1994-95

# XXXI Olimpíada Matemàtica

*Primera Fase (Catalunya)*

| | |
|---|---|
| *Primers premis* | |
| Sergio Cabello Justo | IB J. Lladonosa, (Lleida) |
| Thomas Doumenc | Liceu Francès (Barcelona) |
| *Segons premis* | |
| Joaquim Puig Sadurní | IB Sants (Barcelona) |
| Ferran Revilla Domingo | IB Lluís de Peguera (Manresa) |
| *Tercer premi* | |
| Ana de Mier Vinué | Jesuïtes de Casp (Barcelona) |

*Segona Fase (Espanya), medalles d'or*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Ángel paredes Galán | (Santiago) |
| 2 | Jerónimo Arenas García | (Sevilla) |
| 3 | Luis Fabianoi Bendicho o | (Zaragoza) |
| 4 | Jaume Andre Pascual | (Balears) |
| 5 | Alejandro García Gil | (Madrid) |
| 6 | Ignacio Fernández Galván | (Extremadura) |

# Curs 1994-95

# 36th International Mathematical Olympiad

# (Toronto, Canada)

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 354 presentats):

| | |
|---|---|
| *Hongria, 3:* | Peter Burcsi, Egmont Koblinger, Mihaly Barasz |
| *R. P. Xina, 3:* | Song Liu , Cheng Chang, Chenchang Zhu |
| *Romania, 3:* | Dragos Oprea, Ciprian Manolesco, Ovidiu Savin |
| *Bulgària, 1:* | Nikolay Nikolov |
| *Rússia, 1:* | Serguei Norine |
| *Iran, 1:* | Maryam Mirzakhani |
| *Corea del Sud, 1:* | Sug-woo Shin |
| *Vietnam, 1:* | Ngo Dac Tuan |

# Curs 1993-94
# XXX Olimpíada Matemàtica

*Primera Fase (Catalunya)*

| | |
|---|---|
| *Primers premis* | |
| David Arso Civil | Escola Pia de N. Sra-I. J. Bofill (Barcelona) |
| Rubén Albiol López | IB Camp Clar (Tarragona) |
| *Segons premis* | |
| José M. Torrego Solana | Col·legi Llor (Sant Boi de Llobregat) |
| José R. Domingo Magaña | I.B. Camp Clar (Tarragona) |
| *Tercers premis* | |
| Mario Parra Kaiser | Aula Escola Europea (Barcelona) |
| Francesc Gassó Minguet | I.B. Martí Franquès (Tarragona) |

*Segona Fase (Espanya)*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | David Sevilla González | (Alcorcón, Madrid) |
| 2 | Tomás Baeza Oliva | (Madrid) |
| 3 | Miguel Catalina Gallego | (Valladolid) |
| 4 | Alfonso Gracia Saz | (Zaragoza) |
| 5 | Jerónimo Arenas García | (Sevilla) |
| 6 | Miguel A. Bermúdez Carro | (Betanzos, Coruña) |
| | Antonio Rojas León | invitat, fora de concurs (Sevilla) |

# Curs 1993-94

# 35th International Mathematical Olympiad

# (Hong-Kong)

Concursants amb puntuació màxima de 42 punts sobre 42 (de 354 presentats):

| | |
|---|---|
| *R. P. Xina, 2:* | Jianbo Peng, Jian Zhang |
| *França, 1:* | Philippe Golle |
| *Hongria, 1:* | Szabolcs Szadeczky Kardoss |
| *Polònia, 1:* | Grzegorz Bobinski |
| *Rússia, 3:* | Mikhail Bondarko, Roman Karassev, Serguei Norine |
| *Eslovàquia, 1:* | Andrej Zlatos |
| *Ucraïna, 1:* | Yuliy Sannikov |
| *USA, 6:* | Alexander Khazanov, Jeremy Bem, Jacob Lurie, Noam Shazeer, Stephen Wang, Jonathan Weinstein |

# ELS PROBLEMES DE LES OLIMPÍADES

# 1 a 40

*Primera sessió*

**1C1.** Un taverner disposa de 150 l de vi a 12 pta/l, 200 l de vi a 9 pta/l i 250 l de vi a 7 pta/l. Vol obtenir una mescla a 10 pta/l. Quants litres de mescla podrà obtenir?

**1C2.** Si a cada nombre complex $z$ li fem correspondre el nombre

$$z' = 2z - 1$$

s'obté una transformació del pla en ell mateix.
a) Quin és el transformat del semipla dels afixos del nombres $z$ que tenen part real més gran que $1/2$?
b) Quins punts del pla es transformen en ells mateixos?
c) Quines rectes del pla es transformen en elles mateixes?

**1C3.** a) Quatre persones guarden una caixa forta. Digueu quants panys ha de tenir la caixa, i quantes claus cada persona, per tal que tres persones qualssevol de les quatre puguin obrir la caixa i dues persones no puguin.
b) El mateix amb sis persones.
c) $n$ persones guarden una caixa forta. Digueu quants panys ha de tenir la caixa, i quantes claus cada persona, per tal que $a$ persones qualssevol de les $n$ puguin obrir la caixa i $a-1$ persones no puguin.

**1C4.** Un frontó està format per dues parets verticals perpendiculars, la frontal i la lateral. A la lateral hi ha un forat $A$ situat a una altura de 5 m i distant 7 m de la paret frontal. Un individu situat en un punt $B$ les distàncies del qual a les parets frontal i lateral són 3 m i 6 m, llança una pilota contra la paret frontal des d'una altura de 1 m, de manera que després de rebotar penetra al forat $A$ de la paret lataral. Es pregunta:
a) Quin és l'angle que forma la trajectòria de la pilota amb la paret del frontó?
b) Quina és la longitud del camí recorregut per la pilota?

*Segona sessió*

**1C5.** Trobeu els nombres de la forma $aa$ i $bbcc$ tals que

$$aa = \sqrt{bbcc}\,.$$

**1C6.** Donat un triangle, traceu dues circumferències iguals tangents entre elles, una d'elles tangent als costats $a$ i $b$ del triangle, i l'altra tangent als costats $a$ i $c$.

**1C7.** Trobeu els moviments del pla que transformen el conjunt de punts de coordenades enteres en ell mateix.

**1C8.** Donada una circumferència de centre $O$ i radi $r$, i dos diàmetres perpendiculars $AB$ i $CD$, trobeu els punts $P$ de la circumferència tals que la suma de les àrees dels triangles $APO$ i $CPO$ sigui màxima o mínima.

---

**Guanyadors:** Antoni Oliva Cuyàs, Salvador Barberá Sánchez, Alfonso Costa Cuadrench.

*Primera sessió*

**1E1.** Donada l'equació $x^2 + ax + 1 = 0$ determineu
a) L'interval on ha de prendre valors el nombre real $a$ per tal que les arrels de l'equació siguin imaginàries.
b) El lloc geomètric dels punts representatius d'aquestes arrels en la representació gràfica habitual dels nombres complexos, si $a$ recorre l'interval trobat abans.

**1E2.** L'impost sobre el Rendiment del Treball Personal és una funció $f(x)$ del total $x$ de les retribucions anuals (en pessetes). Sabem que
a) $f(x)$ és una funció contínua.
b) La derivada $df(x)/dx$ a l'interval $0 \leq x < 60000$ és constant i igual a 0; a l'interval $60000 < x < P$ és constant i igual a 1; i per $x > P$ és constant i igual a $0.14$.
c) $f(0) = 0$ i $f(140000) = 14000$.
Determineu el valor de $P$ i representeu gràficament la funció.

**1E3.** Es considera un polígon convex de $n$ costats. Es tracen totes les rectes diagonals i se suposa que no n'hi ha tres de concurrents en un punt que no sigui un vèrtex, i tampoc n'hi ha dues de paral·leles. Es demana
a) El nombre total de punts d'intersecció de les diagonals, excloent els vèrtexs.
b) El nombre de punts anteriors que són interiors al polígon, i el nombre dels que són exteriors.

**1E4.** Donat el triangle equilàter $ABC$ de costat $a$ i la seva circumferència circumscrita, es considera el segment de cercle limitat per la corda $AB$ i l'arc (de $120^\circ$) dels mateixos extrems. Si tallem aquest segment circular per rectes paral·leles al costat $BC$, determinem sobre cada una d'elles un segment els punts del qual són interiors al segment circular esmentat. Digueu quina és la longitud màxima d'aquests segments rectilinis.

*Segona sessió*

**1E5.** Donat un pentàgon regular es dibuixen els cinc segments diagonals. Determineu el nombre total de triangles que apareixen a la figura i classifiqueu aquest conjunt en classes de triangles iguals (directes o inversos) entre ells.

**1E6.** Representeu gràficament la funció

$$y = \Big| \big| |x-1| - 2 \big| - 3 \Big|$$

a l'interval $-8 \leq x \leq 8$.

**1E7.** Es considera un fitxer amb 1000 fitxes numerades ordenades en l'ordre natural. Al fitxer li apliquem l'operació següent:
*La primera fitxa és col·loca intercalada entre la penúltima i l'última. La segona fitxa es col·loca al final, de manera que la tercera queda en primer lloc.*
Observant la posició que ocupa cada una de les fitxes, demostreu que després de 1000 operacions anàlogues aplicades successivament (cada una a l'ordenació que resulta de l'operació anterior), el fitxer torna a estar en l'ordre natural.
Comproveu que no es pot obtenir el mateix resultat si es tracta d'un fitxer amb un nombre senar $n$ de fitxes i es fan $n$ operacions.

**1E8.** En un pla vertical es consideren els punts $A$ i $B$ situats sobre una recta horitzontal, i la semicircumferència d'extrems $A$, $B$ situada al semiplà inferior. Un segment de longitud $a$ igual al diàmetre de la circumferència es mou de manera que conté sempre el punt $A$ i un dels extrems recorre la semicircumferència donada. Determineu el valor del cosinus de l'angle que ha de formar aquest segment amb la recta horitzontal per tal que el seu punt mitjà ocupi la posició més baixa possible.

---

**Guanyadors:** Eugenio J. Miranda Palacios, Alberto de la Torre, Antoni Oliva Cuyàs.

*Primera sessió*

**2C1.** En una reunió hi ha més homes que dones, més dones que beuen que homes que fumen, i més dones que fumen i no beuen que homes que no beuen ni fumen. Demostreu que hi ha menys dones que no beuen ni fumen que homes que beuen i no fumen.

**2C2.** Segons una norma del Codi de Circulació, la distància entre dos cotxes que van a velocitat de $v$ Km/h ha de ser igual o superior a $(v/10)^2$ m. Suposant que la longitud dels cotxes sigui de 4 m i la distància entre cotxes consecutius sigui la mínima possible, es vol conèixer la velocitat que dóna la millor fluidesa de tràfic.

* **2C3.** En una corona circular, una corda de la circumferència exterior que és tangent a la circumferència interior mesura 20 cm. Calculeu l'àrea de la corona.

* **2C4.** L'afix d'un nombre complex $z$ i els tres afixos de les seves arrels cúbiques formen un rombe. Trobeu $z$.

*Segona sessió*

* **2C5.** Trobeu el grup de moviments del pla que transformen una recta donada en ella mateixa.

* **2C6.** Demostreu que les rectes que uneixen els punts mitjans dels parells d'arestes oposades d'un tetràedre regular, es tallen.

* **2C7.** Determineu $a$ per tal que l'equació

$$x^3 + x^2 - x + a = 0$$

tingui una arrel que sigui mitjana aritmètica de les altres dues. En aquest cas, calculeu les tres arrels.

**2C8.** Dos miralls plans formen un angle $\omega$. Un raig de llum normal a un dels dos miralls es reflecteix alternativament en cada un dels dos miralls. Digueu quins valors pot tenir $\omega$ per tal que en una d'aquestes reflexions el raig surti paral·lel a un mirall.

---

**Guanyadors:** Francisco Calbet Rebollo, Josep Oriol Solé Subiela, Gerald Welters Dyhdalewicz.

*Primera sessió*

**2E1.** Un triangle equilàter inscrit en una circumferència de centre $O$ i radi igual a 4 cm es fa girar un angle recte al voltant de $O$. Trobeu l'àrea de la part comuna al triangle donat i a l'obtingut en aquest gir.

**2E2.** Digueu quants nombre hi ha de tres xifres (és a dir, més grans que 99 i més petits que 1000) que tinguin la xifra central més gran que les altres dues. D'entre ells, quants n'hi ha que tinguin les tres xifres diferents?

**2E3.** Un disc microsolc gira a velocitat de $33\frac{1}{3}$ revolucions per minut i l'audició dura 24 min 30 s. La part enregistrada té 29 cm de diàmetre exterior i 11.5 cm de diàmetre interior. Amb aquestes dades calculeu la longitud del solc enregistrat.

**2E4.** Trobeu tots els intervals de valors de $x$ pels quals

$$\cos x + \sin x > 1.$$

Resoleu el mateix problem per

$$\cos x + |\sin x| > 1.$$

*Segona sessió*

**2E5.** És ben conegut que si $p/q = r/s$, aleshores $p/q = (p-r)/(q-s)$. Escrivim ara la igualtat

$$\frac{3x-b}{3x-5b} = \frac{3a-4b}{3a-8b}.$$

Per la propietat anterior, les dues fraccions han de iguals a

$$\frac{3x-5b-3a+8b}{3x-b-3a+4b} = \frac{3x-3a+3b}{3x-3a+3b} = 1$$

mentre que les primeres són, en general, diferents de la unitat. Expliqueu clarament el perquè d'aquest resultat.

**2E6.** Es construeix amb filferro un triangle equilàter de costat $l$ i es col·loca sobre una esfera de radi $r$ que no passa a través del triangle. Digueu a quina distància del centre de l'esfera queden els vèrtexs del triangle.

**2E7.** Un tronc de con de revolució té la base gran de radi $r$ i les generatrius formen amb el pla de la base un angle que té per tangent $m$. El tronc de con està format per un material de densitat $d$ i la base menor està recoberta per una làmina de massa $p$ g/cm$^2$. Digueu quina és l'altura del tronc de con per a la qual la massa total és màxima. Feu la discussió completa del problema.

**2E8.** Sigui $\gamma_1$ una circumferència de radi $r$ i $P$ un punt exterior que dista $a$ del centre. Suposem construïdes les dues rectes tangents a $\gamma_1$ per $P$, i sigui $\gamma_2$ una circumferència de radi menor que el de $\gamma_1$, tangent a aquesta i a les dues rectes. En general, una vegada construïda la circumferència $\gamma_n$, se'n construeix una altra $\gamma_{n+1}$ de radi menor que el de $\gamma_n$ i tangent a aquesta i a les dues rectes citades. Determineu

a) El radi de $\gamma_2$.

b) L'expressió general del radi de $\gamma_n$.

c) El límit de la suma de les longituds de les circumferències $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$

---

**Guanyadors:** Luis Puig Espinosa, Jaime Vinuesa Tejedor, Andrés Méndez Rutllán.

*Primera sessió*

**3C1.** Trobeu els polígons regulars els angles dels quals mesuren un nombre enter de graus.

**3C2.** Els carrers d'una ciutat formen enreixat de dues trames, una formada pels carrers longitudinals i una altra pels transversals. Els longitudinals es designen amb els nombres naturals 1, 2 i 3; i els transversals amb les lletres de l'alfabet *a, b, c, d, e* i *f*; i en aquest ordre. Una persona surt a passejar de la cruïlla (1,*a*). Tira un dau amb sis cares numerades de l'u al sis. Si surt un múltiple de 3, recorre una travessia longitudinal, i en cas contrari una de transversal. A cada cruïlla repeteix l'operació. Digueu quina és la probabilitat que passi per la cruïlla (3,*d*).

**3C3.** Un dipòsit té la superfície formada per un cilindre completat per dues semiesferes a les bases. El dipòsit està col·locat de forma que les generatrius del cilindre són horitzontals. Gradueu una vara vertical de manera que doni el volum del líquid contingut al dipòsit en funció de l'altura mercada a la vara.

**3C4.** Els elements d'un grup es poden expressar com a productes finits de la forma $abcd\cdots$ on cada fator, o és igual a $g$, o és igual a $s$. Aquests $g$ i $s$ compleixen

$$g^n = I$$
$$s^2 = I$$
$$s\,g = g^{n-1}\,s$$

on $I$ és l'element neutre del grup , i els exponents tenen el significat de producte de termes iguals.

a) Trobeu el nombre d'elements del grup.

b) Doneu la taula del grup per a $n = 6$.

*Segona sessió*

**3C5.** Si fem $s = x + y$ i $p = xy$, expresseu $(x - y)^4$ com a polinomi en $s$ i $p$.

**3C6.** Amb base als costats d'un quadrat es construeixen triangles isòsceles que intercepten els costats oposats en segments iguals a un terç del costat del quadrat. Calcular, en funció d'aquest costat, l'àrea de l'estrella de quatre puntes que té per vèrtexs els dels triangles exteriors al quadrat.

**3C7.** Digueu quants moviments transformen un políedre regular en ell matix.

**3C8.** Referit al pla a coordenades cartesianes, es consideren el conjunt de punts de coordenades enteres. En aquest conjunt es defineix una relació d'equivalència: dos punts la satisfan si i només si les primeres coordenades són càngrues mòdul 2 i les segones coordenades són càngrues mòdul 3. Es demana:
a) El nombre de classes d'equivalència.
b) El representant de cada classe a distància mínima de l'origen.
c) Al conjunt de classes es defineix una suma component a component (mòdul 2 i 3, respectivament). Escriviu la taula del grup que s'obté.
d) Si es defineix, a més a més, un producte component a component (mòdul 2 i 3, respectivament), s'obté un anell. Trobeu-ne els divisors de zero.

---

**Guanyadors:** Antoni Gomà Nasarre, Antonio Casaña Barle, Jorge Casdal Casas.

*Primera sessió*

**3E1.** Un fabricant de tres productes de preus unitaris 50, 70 i 65 Pta rep una comanda de 100 unitats d'un detallista que li tramet un pagament de 6850 Pta. El detallista posa la condició que li envïi el màxim possible del producte més car, i la resta dels altres dos productes. Quant ha d'enviar de cada producte per tal de servir la comanda?

**3E2.** Un nombre de tres xifres s'escriu $xyz$ en el sistema de base 7, i $zyx$ en el sistema de base 9. Quin nombre és?

**3E3.** Donat un pentàgon regular es considera el pentàgon convex limitat per les diagonals. Es demana:
a) La relació de semblança entre els dos pentàgons convexos.
b) La relació de les àrees.
c) La raó de l'homotècia que transforma el primer en el segon.

**3E4.** Es vol penjar un pes $P$ de manera que quedi 7 m per sota del sostre. Es penja per mitjà d'un cable vertical agafat al punt mitjà $M$ d'una cadena que a la vegada està agafada al sostre en dos punts $A$ i $B$ que disten 4 m. El preu del cable $PM$ és $p$ pta/m i el preu de la cadena $AMB$ és $q$ pta/m. Es demana:
a) Determineu les longituds del cable i la cadena per a obtenir el preu més econòmic de l'instal·lació.
b) Discutiu la solució per a diferents valors de la relació $p/q$ dels dos preus.

*Segona sessió*

**3E5.** La longitud de l'hipotenusa $BC$ d'un triangle rectangle $ABC$ és $a$, i sobre ella s'agafen els punts $M$ i $N$ tals que $BM = NC = k$, on $k < a/2$. Si suposem que només es coneixen les dades $a$ i $k$, calculeu:

a) El valor de la suma de quadrats de les longituds $AM$ i $AN$.

b) La raó de les àrees dels triangles $ABC$ i $AMN$.

c) L'àrea tancada per la circumferència que passa pels punts $A$, $M'$, $N'$, essent $M'$ la projecció ortogonal de $M$ sobre $AC$ i $N'$ la de $N$ sobre $AB$.

**3E6.** Ens diuen que un matrimoni té 5 fills. Calculeu la probabilitat que entre ells hi hagi al menys 2 nois i al menys una noia. Es considera que la probabilitat de néixer noi o noia és $1/2$.

**3E7.** Determineu una progressió geomètrica de set termes si sabem que la suma dels tres primers és 7, i la suma dels tres últims és 112.

**3E8.** Determineu els valors de $a$, $b$, $c$, per tal que la representació gràfica de la funció

$$y = ax^3 + bx^2 + cx$$

tingui una inflexió en el punt d'abscissa $x = 3$, amb tangent d'equació

$$x - 4y + 1 = 0.$$

Dibuixeu la gràfica corresponent.

---

**Guanyadors:** José L. Rubio de Francia, Manuel Gamella Bacete, Antonio Vázquez Rodríguez.

*Primera sessió*

**4C1.** Demostreu que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ no poden ser termes d'una progressió aritmètica ni geomètrica.

**4C2.** Un paral·lelogram $ABCD$ té el vèrtex $A$ fix i el vèrtex oposat $D$ mòbil sobre una circumferència. Sigui $E$ el punt mitjà del costat $AB$ i $M$ la intersecció de $AC$ amb $DE$. Trobeu el lloc geomètric del punt $M$.

**4C3.** Trobeu tots els nombres complexos que compleixen $\overline{z} = z^2$.

**4C4.** Resoleu l'equació

$$\sqrt{2}\,x^4 - 3x^3 + 3\sqrt{2}\,x^2 - 6x + 2\sqrt{2} = 0$$

sabent que una de les arrels és inversa d'una altra.

*Segona sessió*

**4C5.** Partim d'un rectangle $ABCD$ i construïm un altre rectangle $A_1BC_1D_1$ amb la base $A_1B$ meitat de $AB$ i altura $BC_1$ igual a $3/2$ de $BC$; a partir d'aquest es construeix un nou rectangle $A_2BC_2D_2$ amb base i altura que construïdes de la mateixa manera que abans respecte del $A_1BC_1D_1$; i així successivament. Calculeu l'àrea de la reunió de tots els rectangles obtinguts.

**4C6.** A una urna hi ha $b$ boles blanques i $b+n$ boles negres. Calculeu tots els valors possibles de $b$ i $n$ per tal que la probabilitat d'obtenir bola blanca sigui $1/n$.

**4C7.** Un paral·lelogram té vèrtexs en punts de coordenades enteres i té un costat sobre l'eix de les $x$. Sigui $n_2$ el nombre de punts de coordenades enteres que són interiors al paral·lelogram i no estan sobre els costats; sigui $n_1$ el nobre de punts de coordenades enteres que estan sobre els costats del paral·lelogram i no són vèrtexs; i sigui $n_0 = 4$ el nombre de vèrtexs. Demostreu que l'àrea del paral·lelogram és

$$A = n_2 + \frac{n_1}{2} + \frac{n_0}{4}.$$

**4C8.** Trobeu les posicions de les busques d'un rellotge que són susceptibles d'estar en posició inversa, és a dir, que la busca horària estigui en posició de la busca minutera i viceversa.

---

**Guanyadors:** Miguel Conde Font, Julio Falivene Raboso, Arturo Fraile Pérez.

*Primera sessió*

**4E1.** Se sap que la funció real $f(t)$ és monòtona creixent a l'interval $-8 \leq t \leq 8$, però no se sap res del comportament fora d'aquest interval. En quin interval de valors de $x$ es pot assegurar que la funció $y = f(2x - x^2)$ és monòtona creixent?

**4E2.** Determineu els pols de les inversions que transformen quatre punts alineats $A$, $B$, $C$, $D$, en quatre punts $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ que siguin vèrtexs d'un paral·lelogram rectangle, i que $A'$ i $C'$ siguin vèrtexs oposats.

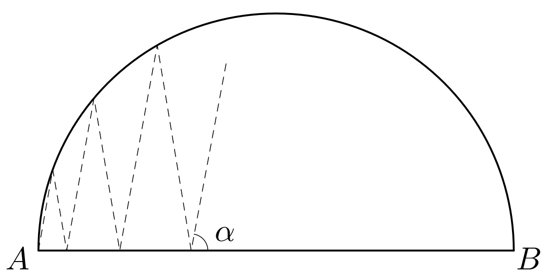
**4E3.** Un semàfor està instal·lat a la cruïlla principal d'una via per on es circula en tots dos sentits. Està vermell 30 s i verd una altres 30 s, alternativament. Es vol instal·lar un altre semàfor a la mateixa via, en una cruïlla secundària, i a 400 m de distància del primer. També ha de funcionar amb un període de 1 min de durada. Volem que els cotxes que circulen a 60 Km/h per la via en qualsevol dels dos sentits i que no s'han d'aturar si només hi hagués el semàfor de la cruïlla principal, tampoc s'hagin d'aturar després d'instal·lar el de la cruïlla secundària. Digueu quants segons pot estar encès el vermell al semàfor secundari.
*Nota:* Raoneu sobre una representació cartesiana de la marxa dels vehicles, amb un eix de distàncies i un altre de temps.

**4E4.** Tenim un botella de fons pla i circular, tancada i plena parcialment de vi, de manera que el nivell no supera la part cilíndrica. Discutiu ens quins casos es pot calcular la capacitat de la botella, sense obrir-la, si només disposem d'un doble decímetre graduat. En cas que sigui possible, descriviu el càlcul. (Problema de la *Gara Matematica* italiana).

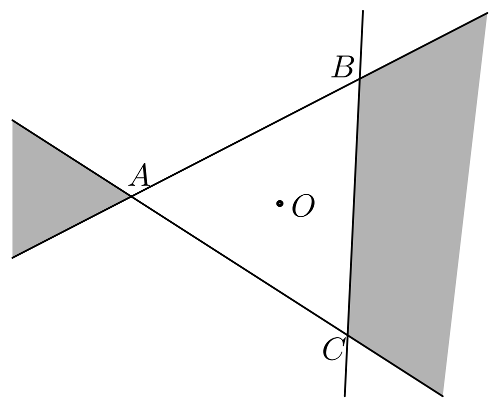
**4E5.** Sigui $\gamma$ una semicircumferència de diàmetre $AB$. Es construeix una línia trencada amb origen $A$ de forma que tingui els vèrtexs alternativament al diàmetre $AB$ i a la semicircumferència $\gamma$ i de manera que tots els costats formin angles iguals $\alpha$ amb el diàmetre (però alternativament en els dos sentits). Es demana:

a) Els valors de l'angle $\alpha$ que fan que la línia trencada passi per l'altre extrem $B$ del diàmetre.

b) La longitud total de la línia trencada en funció de la longitud $d$ del diàmetre i de l'angle $\alpha$.




*Problema* 4E5




*Problema* 4E6

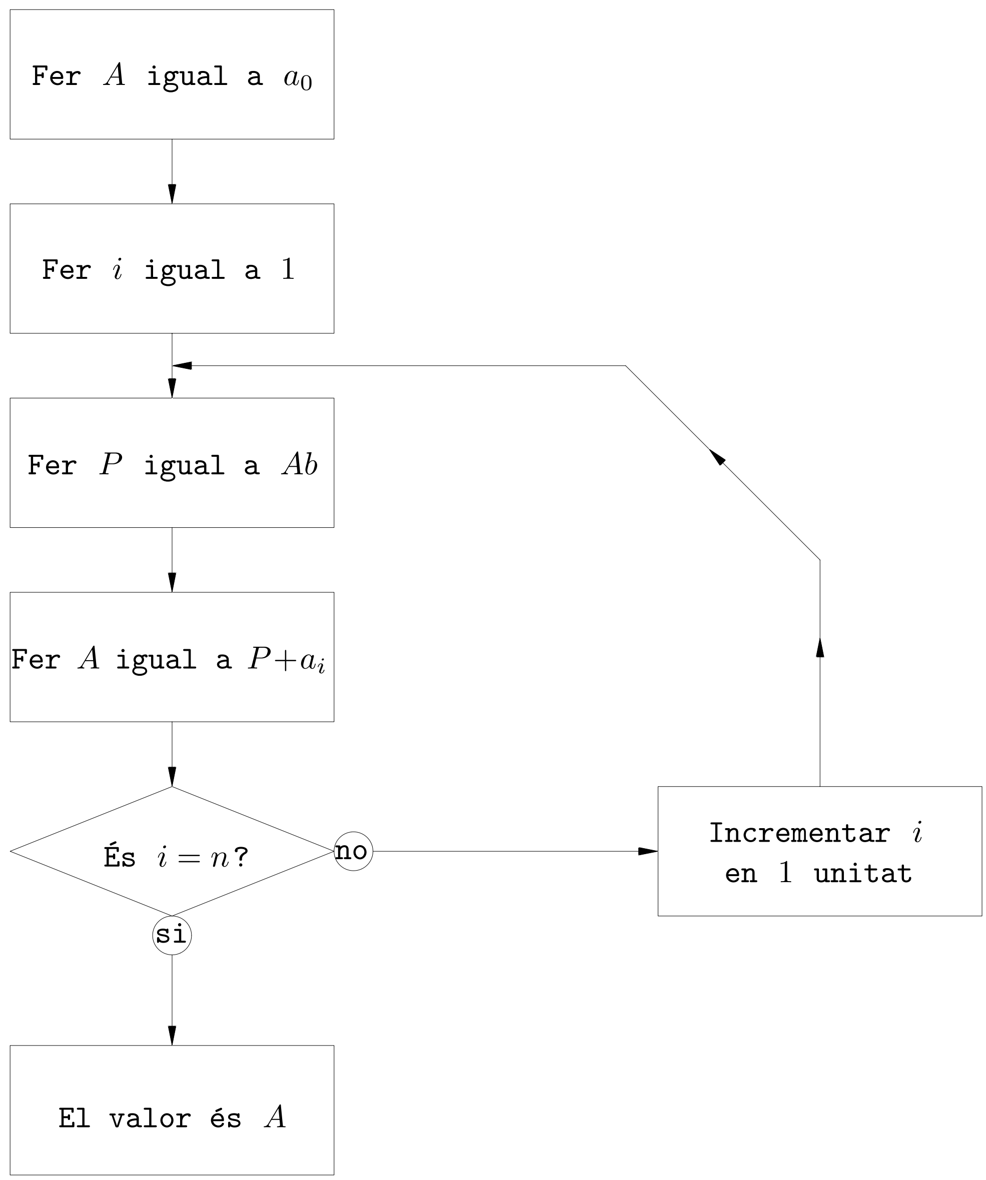
**4E6.** Es dóna un triangle equilàter $ABC$ de centre $O$ i radi $OA = R$ i es consideren les set regions que les rectes costats determinen sobre el pla. Es demana la regió del pla tansformada de les regions marcades amb ombra a la figura adjunta, en una inversió de centre $O$ i potència $R^2$.

**4E7.** Per una carretera hi circula una caravana de cotxes, tots a la mateixa velocitat, mantenint la separació mínima entre cotxes senyalada pel Codi de Circulació. Aquesta separació és, en metres,

$$\frac{v^2}{100},$$

on $v$ és la velocitat expressada en Km/h. Si suposem que la longitud de cada cotxe és de 2.89 m, calculeu la velocitat a la qual han de circular per tal que la capacitat del trànsit resulti màxima, és a dir, que en un punt de la carretera i en un període fixat, hi passin el màxim nombre de vehicles.

**4E8.** Per a obtenir el valor d'un polinomi de grau $n$ i de coeficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (començant pel terme de grau més alt), si a la variable $x$ li donem el valor $b$, es pot aplicar el procés indicat a l'*organigrama* adjunt, que desenvolupa les accions requerides per a aplicar la regla de Ruffini. Es demana que construïu un altre organigrama anàleg que permeti expressar el valor de la *derivada* del polinomi donat, també per a $x = b$.




---

**Guanyadors:** Bernardo López Melero, Arturo Fraile Pérez, Julio Falivene Raboso.

*Primera sessió*

**5C1.** Considerem un alfabet de dues lletres, $a$, $b$, i totes les paraules que es poden formar amb aquest alfabet, ordenades en ordre alfabètic.

a) Quines són les paraules que en tenen una immediatament següent?

b) Quines són les paraules que en tenen una immediatament anterior?

Considerem el conjunt $B$ de les paraules acabades en $b$.

c) El conjunt $B$, té primer i últim element?

d) Demostreu que entre cada dues paraules de $B$ hi ha una altra paraula de $B$.

**5C2.** Considerem tots els nombres que escrits en base deu tenen una expressió que és una permutació de les xifres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Es demana

a) Trobeu el màxim i el mínim de la diferència entre la suma de les xifres de lloc senar i les xifres de lloc parell.

b) Digueu quants nombres hi ha que siguin múltiples d'onze.

**5C3.** Sigui $\mathcal{G}$ un gir de centre $O$ i angle $\alpha$. Trobeu tots els moviments del pla de la forma $\mathcal{M}\mathcal{G}\mathcal{M}^{-1}$, on $\mathcal{M}$ és un moviment pla.

**5C4.** Tres nombres complexos $a$, $b$, $c$ estan representats pels punts $A$, $B$, $C$.

a) Demostreu que tots els triangles $ABC$ tals que

$$\frac{c-a}{b-a} = k, \quad k \text{ complex}$$

són semblants.

b) Què succeeix si $k$ és real?

c) Quins són els valors de $k$ que fan equilàter el triangle?

d) Si suposem $B$ i $C$ fixos, trobeu el lloc geomètric del punt $A$ quan $k$ recorre el conjunt de nombres imaginaris purs, i quan recorre el conjunt de nombres complexos de mòdul unitat.

**5C5.** Demostreu que el polinomi $p(x) = x^{31} - x^{30} + \cdots + x - 1$ és divisible per $q(x) = x^{16} + 1$. Trobeu el polinomi quocient sense fer la divisió, demostreu que aquest quocient és divisible per un binomi anàleg al $q(x)$, i determineu-lo. Repetint el procés les vegades que calgui, demostreu que $p(x)$ té només una arrel real.

**5C6.** a) Demostreu que $\tan \frac{\pi x}{4} < x$ si $0 < x < 1$.
b) Demostreu que si $1 - 2/\pi < x < 1$, es compleix

$$1 - \frac{\pi(1-x)}{2} < \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

*Nota:* Es recomana raonar sobre la gràfica de la funció tangent.

**5C7.** Tres circumferències tangents dues a dues estan a l'interior d'un triangle, de manera que cada una és tangent a dos costats. Si $a$, $b$, $c$ són les distàncies entre els punts de contacte de les circumferències amb els costats, calculeu, en funció d'aquests valors, l'àrea del triangle que té per vèrtexs els centres de les circunferències.

**5C8.** Donat un nombre natural $b$, sigui $B$ el conjunt de nombres racionals que admeten un representant amb denominador $bn$, amb $n$ natural.
a) Digueu si el conjunt $\mathbb{Z}$ dels enters és un subconjunt de $B$.
b) Digueu quins són els valors de $b$ que fan $\mathbb{Z} = B$.
c) És $B$ un cos?
d) Doneu la condició necessària i suficient per tal que un nombre racional donat pertanyi a $B$.

---

**Guanyadors:** Francisco J. Vives Arumí, Roberto Moriyón Salomón, Santiago Manrique Catalán.

*Primera sessió*

**5E1.** Una nit, la temperatura de l'aire es va mantenir constant, uns quants graus sota zero, i la de l'aigua d'un estany cilíndric molt extens, que formava una capa de 10 cm de profunditat, va arribar a ser de zero graus. Es va començar a formar una capa de gel a la superfície. En aquestes condicions es pot suposar que l'altura de la capa de gel formada és proporcional a l'arrel quadrada del temps transcorregut. A les 0 h, el gruix del gel era de 3 cm i a les 4 h es va acabar de gelar l'aigua de l'estany. Digueu a quina hora es va començar a formar la capa de gel sabent que la densitat del gel format era de 0.9

**5E2.** Raoneu si es pot afirmar, negar o declarar no decidible la continuïtat en el punt $x = 0$ de una funció real $f(x)$ de variable real, en cada un dels casos (independents)
a) Se sap únicament que per a tot $n$ natural

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = 1 \;\text{ i }\; f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = -1.$$

b) Se sap que per a tot $x$ real no negatiu és $f(x) = x^2$ i per a tot $x$ real negatiu és $f(x) = 0$.
c) Se sap únicament que per a tot $n$ natural és

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$$

**5E3.** Donat un quadrat de costat $a$ es considera el conjunt de punts del pla pels quals hi passa una circumferència de radi $a$ el cercle de la qual conté el quadrat donat. Demostreu que el contorn de la figura formada per aquests punts està format per arcs de circunferència; determineu-ne els centres, els radis i les longituds.

**5E4.** En els extrems $A$, $B$ d'un diàmetre (de longitud $2r$) d'un paviment circular horitzontal, s'aixequen columnes verticals d'igual altura $h$. Els extrems de les columnes suporten una biga $A'B'$ de longitud igual al diàmetre. Es forma una coberta col·locant nombrosos cables tensos (que se suposa que queden rectes) unint punts de la biga $A'B'$ amb punts de la circumferència, de forma que els cables quedin perpendiculars a la biga. Trobeu el volum tancat entre la coberta i el paviment.

*Segona sessió*

**5E5.** Trobeu el lloc geomètric del centre d'un rectangle els quatre vèrtexs del qual descriuen el contorn d'un triangle donat.

**5E6.** Raoneu si són concurrents, en tot tetràedre
a) Les perpendiculars a les cares en els circumcentres.
b) Les perpendiculars a les cares en els ortocentres.
c) Les perpendiculars a les cares en els incentres.
En cas afirmatiu, caracteritzeu amb alguna propietat geomètrica senzilla el punt de concurrència. En cas negatiu mostreu un exemple en el qual s'aprecïi clarament la no concurrència.

**5E7.** A la successió de potències de 2 (escrites en el sistema decimal, i començant per $2^1 = 2$) hi hi tres termes d'una xifra, tres de dues xifres, quatre de 4 xifres, tres de 5, etc. Raoneu les respostes a les qüestions següents
a) Pot haver-hi solament dos termes d'un cert nombre de xifres?
b) Pot haver-hi cinc termes consecutius amb el mateix nombre de xifres?
c) Pot haver-hi quatre termes de $n$ xifres, seguits de quatre amb $n+1$ xifres?
d) Quin és el nombre màxim de potències consecutives de 2 que es poden trobar sense que entre elles n'hi hagi quatre amb el mateix nombre de xifres?

**5E8.** En un quadrat de costats reflectants, designem els quatre costats amb els noms dels punts cardinals. Fixem un punt al costat N. Determineu en quina direcció n'ha de sortir un raig de llum (cap a l'interior del quadrat) per tal que torni al punt després d'haver tingut $n$ reflexions al costat E, $n$ al costat W, $m$ al costat S i $m-1$ al costat N, essent $n$ i $m$ nombres naturals coneguts. Què passa si $m$ i $n$ no són primers entre ells? Calculeu la longitud del raig lluminós en funció de $m$ i $n$ i de la longitud del costat del quadrat.

---

**Guanyadors:** Francisco J. Vives Arumí, Roberto Moriyón Salomón, Carlos A. Lucio Fernández.

*Primera sessió*

**6C1.** L'arrel quadrada per defecte, amb error menor que $1/10$, d'una fracció irreductible és $1.3$. La suma dels seus termes és 81. Determineu la fracció.

**6C2.** Demostreu que si una equació $P(x) = 0$ té dues arrels inverses, aquestes arrels també ho són de l'equació

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Apliqueu aquesta propietat a la resolució de l'equació

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 8x + 2 = 0$$

sabent que té dues arrels inverses.

**6C3.** Siguin

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r_1^2 = 0$$
$$(x-a')^2 + (y-b')^2 - r_2^2 = 0$$

les equacions de dues circumferències. Demostreu que les circumferències

$$\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 - r_1^2}{r_1} \pm \frac{(x-a')^2 + (y-b')^2 - r_2^2}{r_2} = 0$$

tallen les primeres sota els mateixos angles.

**6C4.** Un punt $X$ de la hipotenusa d'un triangle rectangle es projecta ortogonalment sobre els catets en els punts $M$ i $N$.
Determineu la posició de $X$ per tal que la longitud del segment $MN$ sigui mínima, i aquesta longitud mínima.

**6C5.** Es donen dues rectes $r$ i $s$ secants al punt $O$ i que formen angle $\alpha$. Sobre la bissectriu de l'angle s'agafa un punt $A$ per on es traça una recta variable que talla $r$ al punt $P$ i talla $s$ al punt $Q$. Posem $x = OP$ i $y = OQ$ en magnitud i signe. Demostreu que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

és constant. Calculeu $x$ i $y$ de manera que l'àrea del triangle $OPQ$ sigui una quantitat donada.

**6C6.** Es considera una semiesfera de radi 1 i centre $O$ tangent, en un punt $P$, a un pla $\pi$ paral·lel al pla que conté la circumferència que limita la semiesfera. Per a cada punt $A$ del pla $\pi$ considerem la recta $OA$ que talla la semiesfera en un punt $A_1$, el qual es projecta ortogonalment sobre el pla $\pi$ en un punt $A'$.

a) Com es transforma el pla $\pi$ en l'aplicació $A \to A'$?

b) Trobeu els punts fixos de l'aplicació $A \to A'$.

c) En què es transformen les rectes que passen per $P$?

d) En què es transformen les circumferències de centre $P$?

e) En què es transformen les rectes del pla $\pi$?

**6C7.** Construïu un rectangle donades la diagonal i la suma de dos costats perpendiculars.

* **6C8.** Trobeu els valors màxim i mínim de l'expressió

$$\frac{bc}{(a^3-b^3)(a^3-c^3)} + \frac{ac}{(b^3-a^3)(b^3-c^3)} + \frac{ab}{(c^3-a^3)(c^3-b^3)},$$

essent $a + b + c = 0$.

---

**Guanyadors:** Jaume Lluís García Roig, Fernando Herrero Buj, Andrés Ballbé García.

*Primera sessió*

**6E1.** Trobeu el lloc geomètric dels centres de les inversions que transformen dos punt $A$, $B$ d'una circumferència donada $\gamma$, en punts diametralment oposats de les circumferències inverses de $\gamma$.

**6E2.** Trobeu el lloc geomètric de l'afix $M$ del nombre complex $z$ per tal que estigui alineat amb els afixos de $i$ i $iz$.

**6E3.** Una bossa conté cubs de plàstic de la mateixa mida, amb les cares pintades de color: blanc, vermell, groc, verd, blau i violeta (sense repetir el color a les cares del mateix cub). Quants cubs hi pot haver que siguin distingibles entre ells?

**6E4.** Es divideix una circumferència de radi $R$ en 8 parts iguals. Els punts de la divisió es designen successivament per $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ i $H$. Trobeu l'àrea del quadrat que es forma en dibuixar les cordes $AF$, $BE$, $CH$ i $DG$

*Segona sessió*

**6E5.** Demostreu que un polígon convex de més de quatre costats no es pot descompondre en dos polígons semblants al primer (directament o inversament), per mitjà d'un sol tall rectilini. Digueu raonadament quins són els quadrilàters i triangles que admeten una descomposició d'aquest tipus.

**6E6.** Donat un polinomi de coeficients reals $P(x)$, digueu si es pot afirmar que per a tot valor real de $x$ es compleix alguna de les desigualtats següents:

$$P(x) \leq P(x)^2; \quad P(x) < 1 + P(x)^2; \quad P(x) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(x)^2.$$

Trobeu un procediment general senzill (d'entre els molts que hi ha) que permeti, donats dos polinomis $P(x)$ i $Q(x)$, trobar-ne un altre $M(x)$ tal, que per a tot valors de $x$, sigui

$$-M(x) < P(x) < M(x) \quad \text{i} \quad -M(x) < Q(x) < M(x).$$

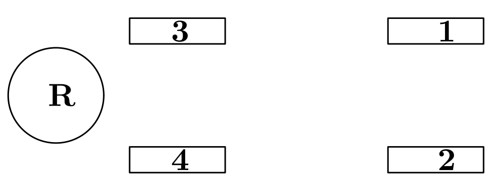
**6E7.** Un poligon convex $A_1A_2 \ldots A_n$ de $n$ costats i inscrit en una circumferència, té els costats que satisfan les desigualtats

$$\overline{A_nA_1} > \overline{A_1A_2} > \overline{A_2A_3} > \cdots > \overline{A_{n-1}A_n}.$$

Demostreu que els angles interiors satisfan les desigualtats

$$\widehat{A_1} < \widehat{A_2} < \widehat{A_3} < \cdots < \widehat{A_{n-1}}, \qquad \widehat{A_{n-1}} > \widehat{A_n} > \widehat{A_1}.$$

**6E8.** La casa SEAT recomana als usuaris, per a la corecta conservació de les rodes, que es facin substitucions periòdiques d'aquestes, en la forma $\mathbf{R} \to \mathbf{3} \to \mathbf{2} \to \mathbf{1} \to \mathbf{4} \to \mathbf{R}$, segons la numeració de la figura. Si anomenem $\mathcal{G}$ a aquest canvi de rodes, $\mathcal{G}^2 = \mathcal{G}\mathcal{G}$ a la realització d'aquest canvi dues vegades, i així successivament per a les altres potències de la transformació $\mathcal{G}$,
a) demostreu que el conjunt de les potències forma un grup, i estudieu-lo.
b) Cada punxada d'una de les rodes equival també a una substitució en la qual la roda punxada es substitueix per la de recanvi (**R**) i, una vegada reparada passa al lloc que ocupava la de recanvi. Doneu $\mathcal{G}$ com a producte de transformacions *punxada*. Formen grup?




---

**Guanyadors:** Jaume Lluís García Roig, Dolores Carrillo Gallego, Jorge Bustos Puche.

*Primera sessió*

**7C1.** Construïu un triangle coneixent l'angle $B$ i les mitjanes que passen pels vèrtexs $A$ i $C$.

**7C2.** Un robí de pes $p$ es fracciona en dos trossos, la qual cosa produeix una pèrdua de valor. En aquest tipus de pedres precioses, els quadrats dels pesos són proporcinals als cubs del valors. Trobeu com ha de partir-se la pedra inicial per tal que la depreciació produïda pel trencament sigui màxima.

**7C3.** El signe $\leq'$ expressa la relació "*ser divisor de*".
a) Qualifiqueu la relació $\leq'$ amb tres adjectius trets d'aquestes parelles

| | | |
|---|---|---|
| reflexiva | ———— | irreflexiva |
| simètrica | ———— | antisimètrica |
| transitiva | ———— | intransitiva |

formant, efectivament, totes les qualificacions possibles *(sic)*. Digueu quina és la vertadera.
b) Si fem que la variable $n$ recorri el conjunt dels nombres naturals, l'expressió

$$64 \ \leq' \ (81 - 18n^2 + n^4)$$

produeix *proposicions*. És per aquest motiu que els lògics l'anomenen *funció proposicional*. Demostreu que són veritat totes les proposicions que resulten per $n$ senar. Deduïu raonadament si són falses totes les que resulten per $n$ parell.

**7C4.** Es considera un tetràedre regular $VABC$ i els punts mitjans dels parells d'arestes oposades: $M$ i $N$; $P$ i $Q$; $R$ i $S$. Decidiu si les rectes $MN$, $PQ$ i $RS$ es tallen o es creuen. El pla determinat pels punts $M$, $N$, $P$ divideix el tetràedre en dues parts. Trobeu la raó dels volums de les dues parts.

**7C5.** Tenim un cub d'aresta $q$. S'uneixen els centres de les cares i s'obté un octàedre. S'uneixen després els centres de les cares de l'octàedre i s'obté un altre cub. Es demana la relació de volums del primer cub al segon i que es dedueixi, si és possible, la suma dels volums dels cubs resultants en repetir indefinidament el procés.

**7C6.** Es considera la funció $f$ definida per

$$f(x,y)=\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}$$

en els punts de

$$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Trobeu els valors més grans i més petits que pren la funció $f$.

**7C7.** A cada punt $M$, afix d'un complex $z$, li apliquem un gir $\mathcal{G}$ de centre $O$ (afix de $z=0$) i amplitud $\alpha$:

$$z_1=\mathcal{G}(z)$$

i obtenim un punt $M_1(z_1)$. A continuació s'aplica al punt obtingut una simetria axial $\mathcal{S}$ respecte de la recta formada pels punts d'argument $\beta$:

$$\mathcal{S}(z_1)=z'$$

i obtenim el punt $M'(z')$.

a) Demostreu que la transformació $\mathcal{S}\cdot\mathcal{G}$ és una simetria axial respecte d'un eix que cal determinar.

b) Demostreu que $\mathcal{S}\cdot\mathcal{G}$ es pot descompondre en el producte d'una simetria d'eix el real $Ox$ per un gir que cal determinar.

**7C8.** Determineu $a$, $b$, $c$ de forma que el polinomi

$$(x+1)^5+a(x+1)+bx+c$$

sigui divisible per $(x-1)^3$ i trobeu el quocient.

---

**Guanyadors:** Ignacio Alegre de Miguel, Simón Barcelona Mas, Alberto Trepat Sorribes.

*Primera sessió*

**7E1.** Un recipient cilíndric de revolució està parcialment ple d'un líquid la densitat del qual ignorem. Si el posem amb l'eix inclinat $30°$ respecte de la vertical observem que en treure líquid de forma que el nivell baixi 1 cm, el pes del contingut disminueix 40 g. Digueu quina serà la disminució del pes del contingut per cada centímetre que baixi el nivell si l'eix forma un angle de $45°$ amb la vetical. Se suposa que la superfície horitzontal del líquid no arriba a tocar cap de les bases del recipient.

**7E2.** Una planta creix de la manera que descrivim a continuació. Té un tronc que es bifurca en dues branques; cada branca de la planta pot, a la vegada, bifurcar-se en dues altres branques, o bé acabar en un gemma. Anomenarem *càrrega* d'una branca al nombre total de gemmes que suporta, és a dir, el nombre de gemmes alimentades per la saba que passa per aquesta branca; i anomenarem *allunyament* d'una gemma al nombre de bifurcacions que la saba ha de passar per arribar del del tronc fins a aquesta gemma.
Si $n$ és el nombre de bifurcacions que té una determinada planta, es demana
a) el nombre de branques de la planta,
b) el nombre de gemmes,
c) demostrar que la suma de les cárregues de totes les branques és igual a la suma dels allunyaments de totes les gemmes.
*Suggeriment:* Es pot procedir per inducció, demostrant que si uns resultats són correctes per una determinada planta, ho segueixen essent per la planta que s'obté substituint una gemma per un parell de branques acabades en gemmes.

**7E3.** Es dóna un triangle arbitrari $ABC$ i un punt $P$ situat al costat $AB$. Es demana que es traci per $P$ una recta que divideixi el triangle en dues figures de la mateixa àrea.

**7E4.** Sabem que els polinomis

$$2x^5 - 13x^4 + 4x^3 + 61x^2 + 20x - 25$$
$$x^5 - 4x^4 - 13x^3 + 28x^2 + 85x + 50$$

tenen dues arrels dobles comunes. Determineu-ne totes les arrels.

**7E5.** En els exàmens de 6è curs d'un Centre, aproven la Física, com a mínim, el 70% dels alumnes; les Matemàtiques, com a mínim, el 75%; la Filosofia, com a mínim, el 90%; i l'Idioma, com a mínim, el 85%. Quants alumnes, com a mínim, aproven les quatre assignatures?

**7E6.** Donada una circumferència $\gamma$ i dos punts $A$ i $B$ del seu pla, es traça per $B$ una secant variable que talla $\gamma$ en dos punts $M$ i $N$. Determineu el lloc geomètric dels centres de les circumferències circumscrites al triangle $AMN$.

**7E7.** Calculeu els valores dels cosinus dels angles $x$ que satisfan l'equació

$$\sin^2 x - 2\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0.$$

**7E8.** Es dóna un punt $M$ a l'interior d'una circumferència, a una distància $OM = d$ del centre $O$. Per $M$ es tracen dues cordes $AB$ i $CD$ que formen angle recte. S'uneix $A$ amb $C$ i $B$ amb $D$. Determineu el cosinus de l'angle que ha de formar la corda $AB$ amb $OM$ per tal que la suma de les àrees dels triangles $AMC$ i $BMD$ sigui mínima.

---

**Guanyadors:** Enrique Rodríguez Bono, Francisco J. Corella Monzón, Ignacio Alegre de Miguel.

*Primera sessió*

**8C1.** Calculeu raonadament els valors enters de $x$ per als quals la funció

$$f(x) = \frac{x^2}{x+6}$$

pren valors enters.

**8C2.** Estic esperant l'ascensor al pis 5è d'una casa de set pisos. En un cert moment l'ascensor inicia la pujada amb dues persones a dins. Sabem que a cada pis hi viuen 10 persones, i que jo no sóc de la casa. Quina és la probabilitat que l'ascensor es pari al 5è pis?

**8C3.** En un triangle $ABC$ el vèrtex $A$ és fix i l'angle $\widehat{BAC}$ és constant. Trobeu el lloc geomètric del vèrtex $C$ si el vèrtex $B$ recorre una recta $r$ i el producte $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ és constant.

**8C4.** Per a cada nombre natural $a$ definim la successió $S_a$

$$x_1 = a; \qquad x_{n+1} = 2x_{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Demostreu que donat un nombre natural qualsevol $b \neq 1$, existeix un únic nombre parell $p$ tal que $b$ és un terme de la successió $S_p$.

**8C5.** Siguin els conjunts $E = \{1, 2, 3, 4\}$ i $A = \{1, 4\}$.
a) Construïu el conjunt $\mathcal{P}(E)$ de les parts de $E$.
b) Definides les relacions

$$X \,\mathcal{R}\, Y \Longleftrightarrow X \cup A = Y \cup A$$
$$X \,\mathcal{R}^*\, Y \Longleftrightarrow X \cap A = Y \cap A$$

per tot $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, demostreu que les dues són relacions d'equivalència i determineu les classes d'equivalència respectives.

**8C6.** Trobeu l'equació de la circumferència que passa pel punt $P(a, 4)$ i és tangent a l'eix d'abscisses en el punt de coordenades $(3, 0)$, sabent que $a$ és igual a la suma de les arrels de l'equació

$$\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^n .$$

**8C7.** Si dos nombres complexos $z$ i $z'$ compleixen

$$|z + z'| = |z - z'|$$

demostreu que $\dfrac{iz}{z'}$ és real.

**8C8.** Sobre una semirecta $OX$ d'origen $O$ s'agafen dos punts fixos $A$ i $B$. Sigui $OY$ una semirecta que formi amb $OX$ un angle $x$.
a) Determineu sobre $OY$ un punt $T$ tal que la diferència entre els angles $TAB$ i $TBA$ sigui igual a $x$.
b) Trobeu el lloc geomètric de $T$ en variar $x$.

---

**Guanyadors:** Antonio Milian Masana, Miguel Canela Camps, Joaquín Frigola Sala.

*Primera sessió*

**8E1.** Calculeu

$$\sum_{k=5}^{k=49} \frac{11_{(k}}{2\sqrt[3]{1331_{(k}}}$$

sabent que els nombres 11 i 1331 estan escrits en base $k \geq 4$.

**8E2.** En una certa geometria operem amb dos tipus d'elements, punts i rectes, que estan relacionats segons els axiomes següents:

I. Donats dos punts $A$ i $B$ , existeix una única recta $(AB)$ que passa per tots dos.

II. Sobre una recta hi ha com a mínim dos punts. Existeixen tres punts no situats sobre una recta.

III. Si un punt $B$ està situat entre $A$ i $C$ llavors $B$ està també entre $C$ i $A$. ($A$, $B$, $C$ són tres punts diferents d'una recta.)

IV. Donats dos punts $A$ i $C$ existeix com a mínim un punt $B$ a la recta $(AC)$ de forma que $C$ està entre $A$ i $B$.

V. Donats tres punts sobre una mateixa recta, com a màxim un d'ells està entre els altres dos.

VI. Siguin $A$, $B$, $C$ tres punts no situats sobre una mateixa recta i $a$ una recta que no conté cap dels tres punts. Si la recta passa per un punt del segment $[AB]$, aleshores passa per un punt del segment $[BC]$ o passa per un del segment $[AC]$. (Designem per $[AB]$ al conjunt de punts que estan entre $A$ i $B$.)

A partir del axiomes anteriors, demostreu les proposicions següents:

*Teorema 1.* Entre els punts $A$ i $C$ existeix almenys un punt $B$.

*Teorema 2.* Donats tres punts diferents sobre una recta, sempre un d'ells està situat entre els altres dos.

**8E3.** Si $0 < p$, $0 < q$ i $p + q < 1$ demostreu

$$(px + qy)^2 \leq px^2 + qy^2.$$

**8E4.** Demostreu que en tot triangle de costats $a$, $b$, $c$ i angles $A$, $B$, $C$ es compleix (mesurant els angles en radiants)

$$\frac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \frac{\pi}{3}.$$

*Indicació:* Feu servir $a \geq b \geq c \Longrightarrow A \geq B \geq C$.

**8E5.** Demostreu que per tot nombre complex $z$ es compleix

$$\big(1+z^{2^n}\big)\big(1-z^{2^n}\big)=1-z^{2^{n+1}}.$$

Escrivint les igualtats que resulten en donar a $n$ els valors 0, 1, 2, ... i multiplicant-les, demostreu que per $|z|<1$ es compleix

$$\frac{1}{1-z}=\lim_{k\to\infty}\big(1+z\big)\big(1+z^2\big)\big(1+z^{2^2}\big)\cdots\big(1+z^{2^k}\big).$$

**8E6.** Les velocitats d'un submarí submergit i en superfície són, respectivament, $v$ i $kv$. Està situat en un punt $P$ a 30 milles del centre $O$ d'un cercle de radi 60 milles. La vigilància d'una esquadra enemiga l'obliga a navegar submergit mentre està dins del cercle. Discutiu, segons els valors de $k$, quin és el camí més ràpid per anar a l'extrem oposat del diàmetre que passa per $P$. (Considereu el cas particular $k=\sqrt{5}$.)

**8E7.** Doneu una inversió que transformi dues circumferències concèntriques i coplanàries en dues altres iguals.

**8E8.** Del conjunt de $2n$ nombres $1,2,3,\ldots,2n$ en triem $n+1$ de diferents. Demostreu que entre els nombres triats n'hi ha dos, com a mínim, tals que un divideix l'altre.

---

**Guanyadors:** M. Isabel Corella Monzón, Vicente Francés Tortosa, José M. Gil Martínez.

*Primera sessió*

**9C1.** Tres ruletes perfectament horitzontals, centrades i equilibrades contenen sectors circulars pintats en vermell i en negre, de la forma següent: la ruleta 1 te $180^\circ$ en negre i $180^\circ$ en vermell; la ruleta 2 té $255^\circ$ en vermell i $135^\circ$ en negre; i la ruleta 3 té $270^\circ$ en vermell i $90^\circ$ en negre. Calculeu la probabilitat que en jugar simultàniament a les tres ruletes surtin dos negres i un vermell.

**9C2.** Demostreu la desigualtat, per $n$ natural més gran que 1,

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

**9C3.** Construïu un triangle coneixent $a+b+c$, $a$ i $\widehat{A}$.

**9C4.** En un grup de 24 alumnes de COU que han escollit al menys una de les assignatures de Filosofia, Geografia i Matemàtiques, se sap que:

5 alumnes trien Filosofia i Geografia,
3 alumnes trien Filosofia i Matemàtiques,
6 alumnes trien Geografia i Matemàtiques.

Se sap també que el nombre d'alumnes que escullen únicament una de les assignatures anteriors és el mateix en els tres casos. Quin és el nombre d'alumnes que tria cada una de les assignatures esmentades?

**9C5.** Contesteu raonadament les qüestions següents:

a) Quin és el periode de la funció $\tan 3x$?

b) Si la funció $f(x)$ té un punt d'inflexió per a $x = x_0$, és necessàriament $f'(x_0) = 0$?

c) Doneu el camp d'existència de la funció

$$y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}.$$

d) En el conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals es defineix la llei de composició interna

$$a * b = a + 3b \quad (a, b \in \mathbb{Q}).$$

Hi ha element neutre d'aquesta llei?

**9C6.** Trobeu el valor de $a$ que fa compatible el sistema d'equacions

$$\begin{cases} \phantom{3x +{}} 2y - z = a \\ 3x - 2z = 11 \\ y + z = 6 \\ 2x + y - 4z = a \end{cases}$$

i resoleu-lo substituint $a$ pel valor trobat.

**9C7.** Determineu $a$, $b$ i $c$ a la funció $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, sabent que la corba corresponent talla l'eix $YY'$ en punts de $(0, -10)$ i té una inflexió amb tangent paral·lela a l'eix $XX'$ en el punt $(-1, 1)$.

**9C8.** Amb centre en els quatre vèrtexs d'un quadrat i radi igual al costat del quadrat es tracen en ell quatre quadrants. Trobeu l'àrea de l'estrella que així es forma.

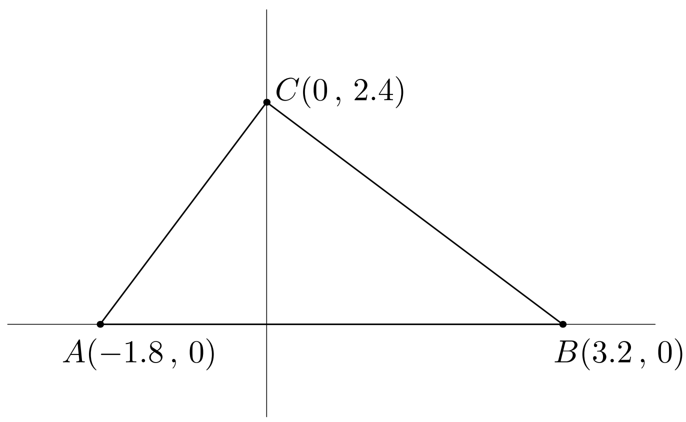
---

**Guanyadors:** Alejandro Turull Crexells, Emilio Vado Vázquez, Josep Gelonch Anyé.

*Primera sessió*

**9E1.** Sigui $K$ un anell amb unitat i $M$ el conjunt de les matrius $2 \times 2$ constituïdes amb elements de $K$. Es defineix a $M$ una addició i una multiplicació de la forma usual entre matrius. Es demana:
a) Comproveu que $M$ és un anell amb unitat i no commutatiu respecte de les lleis de composició definides.
b) Comproveu que si $K$ és un cos commutatiu, els elements de $M$ que tenen invers estan caracteritzats per la condició $ad - bc \neq 0$.
c) Demostreu que el subconjunt de $M$ format pels elements que tenen invers és un grup multiplicatiu.

**9E2.** Un punt es mou sobre els costats del triangle $ABC$ definit pels vèrtexs $A(-1.8, 0)$, $B(3.2, 0)$, $C(0, 2.4)$. Determineu les posicions d'aquest punt de manera que la suma de distàncies als tres vèrtexs sigui màxima o mínima absoluta.




**9E3.** Tenim un prisma hexagonal regular. Digueu quina és la poligonal que, surtint d'un vèrtex de la base, recorre totes les cares laterals i acaba en el vèrtex de la cara superior situat a la mateixa aresta de la sortida, i té longitud mínima.

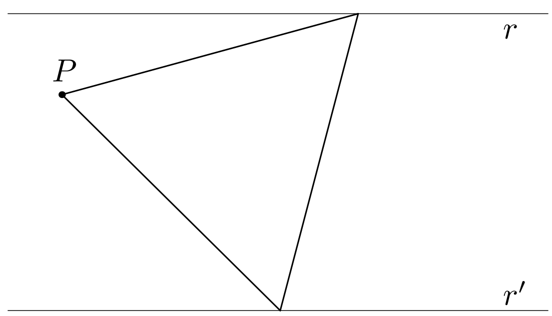
**9E4.** Es consideren al pla els següents conjunts de punts:

$$A = \{\text{afixos dels complexos } z \text{ tals que } \arg\big(z - (2+3i)\big) = \pi/4\},$$

$$B = \{\text{afixos dels complexos } z \text{ tals que } \operatorname{mod}\big(z - (2+i)\big) < 2\}.$$

Determineu la projecció ortogonal sobre l'eix $X$ de $A \cap B$.

**9E5.** Tenim dues rectes paral·leles $r$ i $r'$ i un punt $P$ sobre el pla que les conté que no està sobre cap de les dues rectes. Trobeu un triangle equilàter que tingui un vèrtex a $P$, un altre sobre $r$ i el tercer sobre $r'$.




**9E6.** Donades tres circumferències de radis $r$, $r'$ i $r''$, cada una tangent exteriorment a les altres dues, calculeu el radi del cercle inscrit al triangle que té per vèrtexs els centres de les circumferències donades.

**9E7.** Demostreu que per a tot enter positiu $n$, el nombre

$$A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$$

és múltiple de 8.

**9E8.** Sabem que $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\}$ és un espai vectorial respecte de les lleis de composició

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$
$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Considerem el següent subconjunt de $\mathbb{R}^3$:

$$L = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

a) Demostreu que $L$ és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^3$.

b) A $\mathbb{R}^3$ es defineix la relació següent

$$\overline{x} \mathcal{R} \overline{y} \iff \overline{x} - \overline{y} \in L; \quad \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Demostreu que és una relació d'equivalència.

c) Trobeu dos vectors de $\mathbb{R}^3$ que pertanyin a la mateixa classe que el vector $(-1, 3, 2)$.

---

**Guanyadors:** Josep Gelonch Anyé, José I. Querol Bravo, José Bonet Solves.

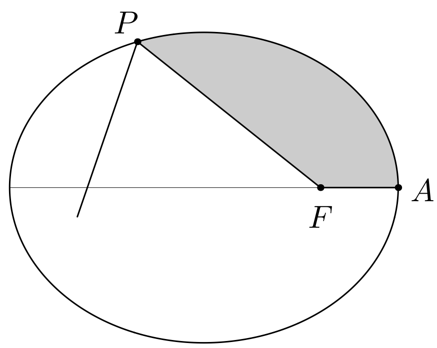
*Primera sessió*

**10C1.** Digueu qui és més gran: $e^\pi$ o $\pi^e$.

**10C2.** Donada l'el·lipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es considera el sector definit per dos raigs focals. El primer, $FA$, passa pel vèrtex més pròxim a $F$; el segon, $FP$, forma un cert angle donat $\alpha$, $(0 < \alpha < 180°)$, amb $FA$. Calculeu l'àrea del sector el·líptic determinat pels dos raigs (part ombrejada de la figura).




**10C3.** Demostreu la proposició següent: els tres afixos dels complexos $z_1$, $z_2$, $z_3$ formen un triangle equilàter si i només si

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

**10C4.** Demostreu que

$$\log_a b \ \log_b c \ \log_c d \ \log_d a = 1.$$

*Segona sessió*

**10C5.** Una persona passa per sota d'un focus de llum durant la nit. En aquest moment segueix un camí recte amb velocitat constant de $v$ m/s. Trobeu la velocitat de creixement de la seva ombra a mesura que va caminant, si $h$ i $a$ són les altures respectives del focus i de la persona.

**10C6.** Demostreu que les altures d'un triangle acutangle són les bisectrius dels angles d'un triangle els vèrtexs del qual són els peus d'aquelles altures.

**10C7.** Sigui $A$ una anell amb element unitat $e$, i $B$ un subanell de $A$, també amb element unitat $e'$. Han de ser iguals $e$ i $e'$? En cas negatiu, poseu un exemple.

**10C8.** Una bossa conté 13 boles, de les quals 4 són negres, 6 blanques i 3 vermelles. De quantes maneres es pot treure un conjunt de 5 boles que contingui, al menys, una bola de cada color.

---

**Guanyadors:** Enrique Frau Picó, Jorge Esteve Comas, Juan J. Carmona Domenech.

*Primera sessió*

**10E1.** Donada la successió $(a_n)$, on

$$a_n = \frac{1}{4}n^4 - 10n^2(n-1), \quad \text{per} \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Determineu el terme mínim de la successió.

**10E2.** Determineu totes le solucions del sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y + 11z - 6 = 0 \\ -x + 3y - 16z + 8 = 0 \\ 4x - 5y - 83z + 38 = 0 \\ 3x + 11y - z + 9 > 0 \end{cases}$$

en el qual hi ha tres equacions i una inequació lineals.

**10E3.** Es considera en el pla complex la successió $(a_n)$ de nombres complexos definida per

$$a_0 = 1, \text{ i } a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n}\big(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ\big)^n.$$

Demostreu que la successió de parts reals del termes de $(a_n)$ és convergent i el seu límit és un nombre comprès entre $0.85$ i $1.15$.

**10E4.** Siguin $C$ i $C'$ dues circumferències concèntriques de radis $r$ i $r'$ respectivament. Determineu el valor del quocient $r'/r$ per tal que a la corona limitada per $C$ i $C'$ existeixin vuit circumferències $C_i$, $i = 1, \ldots, 8$, que siguin tangents a $C$ i a $C'$, i també que $C_i$ sigui tangent a $C_{i+1}$ per $i = 1, \ldots, 7$ i $C_8$ tangent a $C_1$.

**10E5.** Es considera el conjunt de tots els polinomis de grau menor o igual que 4 amb coeficients racionals.
a) Demostreu que té estructura d'espai vectorial sobre el cos dels racionals.
b) Demostreu que els polinomis $1$, $x-2$, $(x-2)^2$, $(x-2)^3$ i $(x-2)^4$ formen una base d'aquest espai.
c) Expresseu el polinomi $7+2x-45x^2+3x^4$ en la base anterior.

**10E6.** Es considera un triangle equilater d'altura 1. Per tot $P$ de l'interior del triangle, es designen per $x$, $y$, $z$ les distàncies del punt $P$ als costats del triangle.
a) Demostreu que per tot punt $P$ interior del triangle es compleix que $x+y+z=1$.
b) Digueu quins són els punts de l'interior del triangle que compleixen que la distància a un costat és més gran que la suma de les distàncies als altres dos.
c) Tenim una barra de longitud 1 i la trenquem en tres troços. Trobeu la probabilitat que amb aquests troços es pugui formar un triangle.

**10E7.** En el pla es consideren els dos punts $P(8,2)$ i $Q(5,11)$. Un mòbil es desplaça de $P$ a $Q$ seguint un camí que ha de complir les condicions següents: el mòbil surt de $P$ i arriba a un punt de l'eix $x$ i recorre sobre aquest eix un segment de longitud 1; després se separa altra vegada de l'eix $x$ i es dirigeix cap un punt de l'eix $y$, sobre el qual recorre un segment de longitud 2; se separa de l'eix $y$ i va cap a un punt $Q$. D'entre tots els camins possibles, determineu el de longotud mínima, així com aquesta longitud.

**10E8.** En un espai euclidià de tres dimensions es designen per $u_1$, $u_2$, $u_3$ els tres vectors unitaris ortogonals sobre els eixos $x, y, z$.
a) Demostreu que el punt $P(t)=(1-t)u_1+(2-3t)u_2+(2t-1)u_3$ , on $t$ pren tots els valors reals, descriu una recta (que designarem per $L$).
b) Digueu quina figura descriu el punt $Q(t)=(1-t^2)u_1+(2-3t^2)u_2+(2t^2-1)u_3$ si $t$ pren tots els valors reals.
c) Trobeu un vector paral·lel a $L$.
d) Quins són els valors de $t$ que fan que el punt $P(t)$ sigui sobre el pla $2x+3y+2z+1=0$?
e) Trobeu l'equació cartesiana del pla paral·lel a l'anterior i que contingui el punt $P(3)$.
f) Trobeu l'equació cartesiana del pla perpendicular a $L$ que contingui el punt $P(2)$.

---

**Guanyadors:** Antonio García Fernández, Miguel Castaño Gracia, Enrique Frau Picó.

*Primera sessió*

**11C1.** a) Demostreu que la mitjana geomètrica entre quatre nombres reals positius és menor o igual que la seva mitjana aritmètica.
b) Descomponeu el nombre 180 en suma de quatre sumands de manera que el producte sigui mínim.

**11C2.** Un home és en una barca situada a 5 Km de la costa, que se suposa rectilínea. El lloc $A$ està situat a la costa a 13 Km de la barca. Pot remar a 3 Km/h i caminar a $r$ Km/h. On haurà de desembarcar per tal d'arribar a $A$ en el mínim temps possible?

**11C3.** Les portes de les habitacions d'una clínica donen a uns corredors que en alguns punt formen angle recte. Per traslladar els malalts es disposa de diverses lliteres rectangulars de 2 m de llarg per 0.5 m d'ample. Quina és l'amplada mínima dels corredors per tal que les lliteres puguin circular per la clínica? Suposant que els corredors tinguin aquesta amplada mínima, quina és l'amplada mínima de les portes per tal que les lliteres puguin entrar a les habitacions?

**11C4.** Al cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos es considera l'equació

$$z^2 - 2(u+4)z - 2u^2 + 2(6+i)u + 19 + 4i = 0$$

on $u$ és un paràmetre complex.
a) Determineu $u$ per tal que aquesta equació tingui una arrel doble, i trobeu les dues solucions de l'equació en el cas general.
b) Sigui $M$ l'afix a $\mathbb{R}^2$ del nombre complex $u$, i $P$ el del complex $z$. Es defineix a $\mathbb{R}^2$ la relació següent:
*$M$ està relacionat amb $P$ si i només si $z$ és una arrel de l'equació donada, corresponent al paràmetre $u$*
Demostreu que $M$ està relacionat amb $P$ si i només si $P = \mathcal{S}'(M)$ o $P = {'}_1(M)$, essent $\mathcal{S}'$ i $\mathcal{S}'_1$ les transformacions del pla en ell mateix definides per

$$z' = u(1+i) + 3 + 2i \qquad z'_1 = u(1-i) + 5 - 2i$$

i estudieu propietats d'aquestes transformacions geomètriques.

*Segona sessió*

**11C5.** Determineu els nombres naturals $n$ tals que $(n-1)!$ és divisible per $n$. (*Indicació:* Raoneu primer suposant que $n$ és primer , i després que $n$ és compost).

**11C6.** Donat un cub d'aresta 1 m, s'uneixen els punts mitjans d'arestes consecutives, de manera que es formi un hexàgon regular.
a) Demostreu que això és possible.
b) Calculeu l'àrea d'aquest hexàgon.
c) Demostreu que entre totes les seccions produïdes per plans paral·lels a l'hexàgon, la d'àrea màxima és la de l'hexàgon.

**11C7.** a) Dibuixeu la gràfica de la funció $y = \mathrm{l}\,x/x$ per a $x > 0$. (Noteu que $\mathrm{l}\,x$ és el logaritme neperià de $x$ i que $y = \mathrm{l}\,x/x$ tendeix a 0 quan $x$ tendeix a infinit.)
b) Sigui $\mathcal{C}$ el conjunt

$$\mathcal{C} = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 1, x \neq e\}.$$

Demostreu que per a tot $x \in \mathcal{C}$, l'equació $x^z = z^x$ té dues solucions; si $x$ és un real positiu que no pertany a $\mathcal{C}$, l'equació anterior té solució única.
c) Si $m$, $n$ són dos nombres naturals diferents tals que $m^n = n^m$, demostreu que els dos nombres només poden ser 2 i 4.
d) Determineu quin és més gran dels dos nombres $\pi^e$ i $e^\pi$. (S'ha d'utilitzar la gràfica dibuixada a l'apartat a) per a resoldre b), c) i d)).

**11C8.** Sigui el pla $\pi$ referit a un sistema $\{O, e_1, e_2\}$, i $\mathcal{T}$ una transformacio puntual de $\pi$ en $\pi$ que a tot punt $M(x,y) \in \pi$ li fan correspondre el punt $M'(x',y') \in \pi$ tal que

$$x' = ax - by, \qquad y' = bx + ay$$

on $a$ i $b$ són nombres lligats per la condició $a^2 + b^2 = 1$.
a) Demostreu que $\mathcal{T}$ és bijectiva.
b) Demostreu que els conjunt de transformacions que resulta en donar a $a$ i $b$ tots els valors reals possibles, forma un grup respecte a l'operació producte de transformacions.
c) Determineu els valors de $a$ i $b$ que corresponen a l'element neutre del grup, i les relacions que han d'existir entre els valors de $(a,b)$ i $(a',b')$ que corresponen a dos elements inversos del grup.
d) Digueu si aquest grup és commutatiu.

---

**Guanyadors:** Juan M. Sueiro Bal, Àngel Calsina Ballesta, Joan Elías García.

*Primera sessió*

**11E1.** Se sap que un dodecàedre regular és un políedre regular que té 12 cares pentagonals iguals i tal que en cada vèrtex hi concorren 3 arestes. Es demana que calculeu, raonadament,
a) el nombre de vèrtexs,
b) el nombre d'arestes,
c) el nombre de diagonals de totes les cares,
d) el nombre de segments rectilinis determinats per cada dos vèrtexs,
d) el nombre de diagonals del dodecàedre.

**11E2.** D'un disc metàl·lic es treu un sector circular de forma que amb la part que queda es pugui fer un vas cònic de volum màxim. Calculeu, en radiants, l'angle del sector que s'ha tret.

**11E3.** Designarem per $Z_{(5)}$ un cert subconjunt del conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals. Un racional pertany a $Z_{(5)}$ si i només si existeixen fraccions pertanyents a aquest racional tals que 5 no divideixi el seu denominador. (Per exemple, el nombre racional 13/10 no pertany a $Z_{(5)}$, ja que el denominador de totes les fraccions iguals a 13/10 és un múltiple de 5. En canvi, el nombre racional 75/10 pertany a $Z_{(5)}$ ja que $75/10 = 15/12$).
Contesteu raonadament les següents qüestions:
a) Quina estructura algebraica (semigrup, grup, etc.) té $Z_{(5)}$ respecte de la suma?
b) I respecte del producte?
c) És $Z_{(5)}$ un subanell de $\mathbb{Q}$?
d) És $Z_{(5)}$ un $Z_{(5)}$-espai vectorial?
(Les operacions són les habituals del cos dels nombres racionals).

**11E4.** Els tres costats d'un triangle equilàter es suposen reflectants (excepte en els vèrtexs), de forma que reflectixin cap a dins del triangle els raigs de llum situats en el seu pla i que surtin d'un punt interior del triangle.
Determineu el recorregut d'un raig de llum que, partint d'un vèrtex del triangle arribi a un altre vèrtex després de reflectir-se successiament en els tres costats. Calculeu la longitud del camí seguit per la llum suposant que el costat del triangle mesuri 1 m.

*Segona sessió*

**11E5.** Sigui $(G,\cdot)$ un grup y $e$ un element neutre. Demostreu que si tots els elements $x$ de $G$ compleixen

$$x\cdot x=e$$

aleshores $(G,\cdot)$ és abelià (o sigui, commutatiu).

**11E6.** En una circumferència de radi igual a la unitat es tracen dues cordes, $AB$ i $AC$ d'igual longitud.
a) Digueu com es pot construir una tercera corda $DE$ de manera que quedi dividida en tres parts iguals per les interseccions amb $AB$ i $AC$.
b) Si $AB=AC=\sqrt{2}$, digueu quant valen les longituds dels dos segments que la corda $DE$ determina sobre $AB$.

**11E7.** Un dipòsit té forma de prisma hexagonal regular, les bases fan 1 m de costat i l'altura és de 10 m. Es situen les arestes laterals en posició oblicua i s'omple parcialment amb 9 $\mathrm{m}^3$ d'aigua. El pla de la superfície lliure de l'aigua talla totes les arestes laterals. Una d'elles queda amb una part de 2 m sota l'aigua. Quina part queda sota l'aigua de l'aresta lateral oposada a l'anterior?

**11E8.** Els costats d'un polígon regular convex del $L+M+N$ costats s'han de dibuixar en tres colors: $L$ han de ser vermells, $M$ han de ser grocs i $N$ han de ser blaus. Expresseu, per mitjà de desigualtats, les condicions necessàries i suficients per tal que tingui solució (més d'una, en general) el problema de pintar els costats sense que dos de contigus tinguin el mateix color.

---

**Guanyadors:** Juan M. Sueiro Bal, Jesús Alcázar Moreno, Luis Narváez Macarro.

*Primera sessió*

**12C1.** Estudieu el sistema

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda^2 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y - z = 1 \\ 6x - y + z = 3\lambda \end{cases}$$

segons els valors del paràmetre $\lambda$.

**12C2.** Donada la corba d'equació $y^2 = x^2 - x^4$, es demana

a) Dibuixeu-la.

b) Àrea de la superfície plana tancada per la corba.

**12C3.** Siguin $P_0$, $P_1$, $P_2$ els afixos de $i$, $0$, $1$. Sigui $P_3$ el peu de la perpendicular traçada des de $P_2$ al segment $P_0P_1$; anàlogament, sigui $P_4$ el peu de la perpendicular traçada des de $P_3$ al segment $P_1P_2$; i així successivament. Trobeu

$$\lim_{n\to\infty} P_n.$$

**12C4.** Calculeu la potència $n$-èsima de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**12C5.** Donades les dues funcions

$$f(x) = \frac{3x}{5x^2 - 1}, \qquad g(x) = \frac{7x}{8x^2 + 2},$$

a) Determineu els tres conjunts

$$\begin{aligned} A &= \{x | f(x) = g(x)\} \\ B &= \{x | f(x) > g(x)\} \\ C &= \{x | f(x) < g(x)\}. \end{aligned}$$

b) Si $x$ és bastant gran, quina de les dues funcions és més gran?

**12C6.** Demostreu que si $f(x)$ i $g(x)$ són dos polinomis de grau $n$, aleshores l'expressió

$$f\, g^{(n)} - f'\, g^{(n-1)} + f''\, g^{(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-1} f^{(n-1)}\, g' + (-1)^n f^{(n)}\, g$$

és independent de $x$.

**12C7.** Siguin $a$, $b$, $a'$, $b'$ nombres racionals, $b$, $b'$ estrictament positius i $\sqrt{b'}$ irracional. Demostreu que una qualsevol de les igualtats

$$a + \sqrt{b} = a' + \sqrt{b'}; \qquad a - \sqrt{b} = a' - \sqrt{b'}$$

implica

$$a = a' \quad \text{i} \quad b = b'.$$

*Aplicació:* Digueu si és un enter

$$\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}.$$

**12C8.** Les corbes $y^2 = x$, $y^2 = x^3$ limiten una regió en el primer quadrant. Es traça, dins de la regió, un rectangle amb els costats paral·lels als eixos. Una de les diagonals té els dos extrems un sobre cada corba. La dimensió horitzontal del rectangle és $1/3$. Trobeu l'àrea del rectangle d'àrea màxima que es pot construir d'aquesta manera.

---

**Guanyadors:** José Lorenzo Vallés Brau, Rafael Abenaza Campodarbe, Ramon Masip Treig.

*Primera sessió*

**12E1.** Calculeu el límit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^k}+\frac{2^k}{n^k}+\cdots+\frac{(n-1)^k}{n^k}+\frac{n^k}{n^k}\right).$$

(Per a calcular el límit es pot seguir el procediment de construcció de la integral).

**12E2.** Estudieu la funció real

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

definida pe $x\in\mathbb{R}-[-1,0]$. Representació gràfica.

**12E3.** Designarem per $Z_{(5)}$ un cert subconjunt del conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals. Un racional pertany a $Z_{(5)}$ si i només si existeixen fraccions pertanyents a aquest racional tals que 5 no divideixi el seu denominador. (Per exemple, el nombre racional $13/10$ no pertany a $Z_{(5)}$, ja que el denominador de totes les fraccions iguals a $13/10$ és un múltiple de 5. En canvi, el nombre racional $75/10$ pertany a $Z_{(5)}$ ja que $75/10 = 15/12$).

Contesteu raonadament les següents qüestions:

a) Quina estructura algebraica (semigrup, grup, etc.) té $Z_{(5)}$ respecte de la suma?

b) I respecte del producte?

c) És $Z_{(5)}$ un subanell de $\mathbb{Q}$?

d) És $Z_{(5)}$ un $Z_{(5)}$-espai vectorial?

(Les operacions són les habituals del cos dels nombres racionals).

**12E4.** Demostreu que si el producte de $n$ nombres reals i positius és igual a 1, la seva suma és més gran o igual que $n$.

**12E5.** Tenim una recta $r$ del pla i dos punts $A$ i $B$ exteriors a la recta i en el mateix semiplà. Determineu un punt $M$ de la recta tal que l'angle de $r$ amb $AM$ sigui el doble del de $r$ amb $BM$. (Considereu com a angle de dues rectes al més petit dels angles que formen).

**12E6.** Siguin $\{x_n\}$ i $\{y_n\}$ dues successions de nombres naturals definides així:

$$\begin{array}{llll} x_1 = 1, \quad x_2 = 1, & x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n & \text{per a} & n = 1, 2, 3, \ldots \\ y_1 = 1, \quad y_2 = 7, & y_{n+2} = 2y_{n+1} + 3y_n & \text{per a} & n = 1, 2, 3, \ldots \end{array}$$

Demostreu que, llevat del cas $x_1 = y_1 = 1$, no existeix cap valor natural que pertanyi a les dues successions.

**12E7.** Es considera la funció real definida per

$$f(x) = \frac{1}{|x+3| + |x+1| + |x-2| + |x-5|}$$

per tot $x \in \mathbb{R}$.

a) Determineu el màxim.

b) Representeu-la gràficament.

**12E8.** S'escullen aleatòriament dos nombres reals entre 0 i 1. Calculeu la probabilitat que un qualsevol d'ells sigui menor que el quadrat de l'altre.

---

**Guanyadors:** Agustín Llerena Achutegui, Federico Cuco Pardillos, Enrique Uzabal Amores.

*Primera sessió*

**13C1.** Calculeu
$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{2}\sqrt{-4x^2-12x-5}\,dx$$
per mitjà de la interpretació geomètrica.

**13C2.** Donats els vectors de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$: $a_1 = (1,3,-2)$, $a_2 = (4,-1,3)$, $a_3 = (-3,17,-16)$, trobeu la dimensió del subespai vectorial $E$ generat per aquests tres vectors. Donat el vector $a_4 = (4,0,m)$, determineu $m$ per tal que aquest vector pertanyi a $E$.

**13C3.** Es consideren tots els nombres naturals des de 1 fins a $10^n$. Calculeu, en funció de $n$, la probabilitat que triant-ne un a l'atzar, sigui múltiple de 2 o de 3.

**13C4.** A l'interior d'un quadrat $ABCD$ de costat unitat s'agafa un punt $P$ i es consideren les quatre distàncies $PA$, $PB$, $PC$ i $PD$. Demostreu que

1) Com a màxim una de les distàncies és més gran que $\sqrt{5}/2$.
2) Com a màxim dues de les distàncies són més grans que 1.
3) Com a màxim tres de les distàncies són més grans $\sqrt{2}/2$.

**13C5.** Les corbes $y = x^3$ i $y = x^n$ amb $n$ natural no nul, limiten una regió tancada. Calculeu-ne l'àrea en funció de $n$.

**13C6.** S'agafa un nombre $A = a_1a_2a_3\ldots$ i el nombre $A' = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ format per la suma de les xifres del nombre $A$. De la diferència dels dos,

$$A - A' = b_1b_2b_3\ldots,$$

es treu una xifra $b_i$. Determineu el valor d'aquesta xifra si ens donen la suma $B = b_1+b_2+b_3+\cdots$ de les restants xifres de $A-A'$. Estudieu si hi ha algun cas d'ambigüitat.

**13C7.** Determineu totes les $n$-ples $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de nombres reals tals que

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

per totes les $n$-ples $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que compleixin

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0.$$

**13C8.** Si es calcula aproximadament el quadrat d'un nombre decimal per mitjà d'una taula de quadrats de nombres naturals (fent servir la mateixa idea que per trobar el logaritme d'un nombre no contingut en una taula), demostreu que l'error comès és menor o igual que $0.25$.

---

**Guanyadors:** Francesc Tiñena Salvañá, Antoni Ras Sabidó, Luis M. Fernández Sánchez-Reyes.

*Primera sessió*

**13E1.** En un pla es donen quatre punts fixos $A$, $B$, $C$, $D$ no alineats tres a tres. Construïu un quadrat de costats $a$, $b$, $c$, $d$ de forma que $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$.

**13E2.** Es considera el conjunt $C$ de totes les $r$-ples les components de les quals són $1$ o $-1$. Calculeu la suma de totes les components de tots els elements de $C$ excloent la $r$-pla $(1, 1, 1, \ldots, 1)$.

**13E3.** A través d'una lent que inverteix la imatge mirem el mirall retrovisor del nostre cotxe. Si en aquest mirall s'hi reflecteix la matrícula del cotxe que ens segueix, `CS-3965-EN`, dibuixeu la imatge que nosaltres rebem. Dibuixeu també la que s'obté de permutar les anteriors transformacions, és a dir, reflectint en el retrovisor la imatge que dóna la lent de la matrícula. És commutatiu el producte de les dues transformacions, la reflexió en el mirall i la refracció a través de la lent?

**13E4.** Demostreu que l'expressió

$$\frac{n^5 - 5n^3 + 4n}{n + 2}$$

on $n$ és un enter qualsevol, és sempre divisible per 24.

**13E5.** Demostreu que l'equació

$$z^4 + 4(i+1)z + 1 = 0$$

té una arrel a cada quadrant del pla complex.

**13E6.** Donada una matriu quadrada $M$ d'ordre $n$ sobre el cos dels nombres reals, trobeu, en funció de $M$, dues matrius, una simètrica i una altra antisimètrica, tals que la seva suma sigui precisament $M$.

**13E7.** El preu d'un diamant és proporcional al quadrat del seu pes. Demostreu que si el trenquem en dues parts el seu preu baixa. Quan és màxima la "depreciació"?

**13E8.** Es dóna la funció

$$y = \left|x^2 - 4x + 3\right|.$$

Estudieu-ne la continuitat i derivabilitat en el punt d'abscissa $1$. La seva gràfica determina amb l'eix $X$ una figura tancada. Determineu-ne l'àrea.

---

**Guanyadors:** Serafín Moral Callejón, Antonio J. Rodríguez de la Cruz, Antonio Barreiro Blas.

*Primera sessió*

**14C1.** Siguin $M$ el punt mitjà del costat $BC$ i $N$ el punt mitjà del costat $DA$ del quadrat $ABCD$. Determineu simetries axials que aplicades successivament permetin transformar el triangle $ABN$ en el $CDM$. S'ha de procurar que el nombre d'aquestes simetries sigui el més petit possible. Doneu els eixos de les simetries que es demanen, i l'ordre d'aplicació de les simetries.

**14C2.** Si $a$ és un nombre real, designem per $U_a$ l'aplicació de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida així:

$$U_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x \in \mathbb{R} \text{ i } x < a, \\ 1, & \text{si } \ x \in \mathbb{R} \text{ i } x \geq a. \end{cases}$$

Estudieu si les aplicacions $U_2$, $U_4$ i $U_5$ són linealment independents (considerades com elements de l'espai vectorial de les aplicacions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, sobre el cos dels nombres reals).

**14C3.** L'Antoni, en Lluís i en Robert han rebut el regal d'un gos, un gat i un canari, i cada un d'ells vol quedar-se un animal. Estan d'acord en les condicions següents:
1) L'Antoni no es queda el gos.
2) Si en Robert es queda el canari, l'Antoni no es queda el gat.
3) Si en Lluís es queda el gos, l'Antoni es queda el gat; i viceversa: si l'Antoni es queda el gat, en Lluís es queda el gos.
Estudieu si hi ha algun repartiment possible dels animals que estigui d'acord amb les condicions. Si és així, digueu quins són aquests repartiments.

**14C4.** Sigui $n$ un nombre natural. Demostreu que cap de les xifres 2, 4, 7, 9, pot ser l'últim dígit del nombre $1+2+3+\cdots+n$.

**14C5.** Siguin $A$ i $B$ dos punt simètrics respecte de la bissectriu del primer quadrant. Siguin $C$ i $D$, respectivament, els afixos dels complexos suma i producte dels complexos determinats per $A$ i $B$. Es demana:
1) Els llocs geomètrics de $A$ i $B$ quan l'angle $\widehat{CBD}$ es de $90°$.
2) Els llocs geomètrics de $C$ i $D$.

**14C6.** Siguin els $h$ nombres reals $a_1$, $a_2$, ... $a_h$, ($h$ fix). Calculeu, si $n \to \infty$, el límit de la successió de terme general

$$b_n = \left( \frac{a_1^{1/n} + a_2^{1/n} + \cdots + a_h^{1/n}}{h} \right)^n .$$

Apliqueu-ho al cas $h = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ i $a_3 = 8$.

**14C7.** Es considera l'equació de segon grau amb paràmetre $m$

$$x^2 + (m-2)x - (m+3) = 0.$$

1) Calculeu $m$ per tal que la suma dels quadrats de les arrels sigui mínim.
2) Calculeu $m$ per tal que la suma dels quadrats de les arrels més el quadrat del producte de les arrels sigui mínim.

**14C8.** Dues ciutats, $A$ i $B$, estan unides per una via de ferrocarril recta. A les 12 h surten de la ciutat $A$ una locomotora $L_A$ i una mosca $M$, en la direcció de la ciutat $B$. A la mateixa hora surt de la ciutat $B$, en direcció a la ciutat $A$, una locomotora $L_B$. Les velocitats uniformes respectives de $L_A$, $L_B$ i $M$ són 30, 40 i 45 Km/h.
La mosca es mou sobre la via segons el criteri següent: despres de sortir de $A$, quan troba $L_B$ retrocedeix fins trobar $L_A$; torna a retrocedir fins a trobar novament $L_B$, i així successivament. Si la longitud de la via és de 350 Km, digueu quina distància ha recorregut la mosca des de la sortida a $A$ fins que és aixafada per les dues locomotores.

---

**Guanyadors:** Jaime Doménech Plana, José A. Román Jiménez, Antonio Llorens Tubau.

*Primera sessió*

**14E1.** Donat el determinant d'ordre $n$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 8 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 8 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 8 \end{vmatrix}$$

calculeu el seu valor i digueu quins són els valors de $n$ que fan que aquest valor sigui múltiple de 10.

**14E2.** Demostreu que totes les matrius quadrades de la forma, per $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

formen un cos commutatiu $\mathbb{K}$ si es consideren les operacions de suma i producte de matrius.
Demostreu també que si $A \in \mathbb{K}$ és un element d'aquest cos, existeixen dues matris de $\mathbb{K}$ tals que els seus quadrats siguin $A$.

**14E3.** Demostreu que en una reunió de 285 persones n'hi ha d'haver una al menys que hagi fet un nombre parell d'encaixades de mà (0 es considera un nombre parell i correspon a un assistent que no encaixi cap mà).

**14E4.** Demostreu que la suma dels quadrats de cinc enters consecutius no pot ser un quadrat perfecte.

*Segona sessió*

**14E5.** Utilitzant una escala mecànica per baixar a l'estació del Metro i caminant amb pas regular, observo que necessito 50 graons per baixar. Si torno a pujar corrents, a una velocitat 5 vegades el meu pas normal anterior, comprovo que necessito 125 graons per arribar a dalt. Quants graons visibles té l'escala mecànica quan està parada?

**14E6.** Sigui $ABC$ un triangle i $D$ el punt de tall de la bissectriu corresponent a l'angle $A$ amb el costat $BC$. Demostreu que la circumferència que passa per $A$ i és tangent a la recta $BC$ en $D$, també és tangent a la circumferència circumscrita al triangle $ABC$.

**14E7.** Tenim els nombres $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$. Demostreu, sense necessitat de calcular derivades, que el valor de $X$ que fa mínima la suma

$$(X - A_1)^2 + (X - A_2)^2 + \cdots + (X - A_n)^2$$

és, precisament, la mitjana aritmètica dels nombres donats.

**14E8.** Determineu una condició necessària i suficient per tal que els afixos de tres nombres complexos $z_1$, $z_2$ i $z_3$ siguin els vèrtexs d'un triangle equilàter.

---

**Guanyadors:** Alberto Elduque Palomo, Francisco J. Palma Molina, José Peña Gamarra.

*Primera sessió. Abril de 1979.*

**15C1.** Sigui el polinomi $p(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$. Demostreu que per a tot $n$ natural més gran que 2, es compleix:
a) $p(n) = 6h$, on $h$ és un natural.
b) $h + 1$ no és primer.

**15C2.** Un tetràedre de l'espai euclidià $E_3$ té dos parells d'arestes oposades ortogonals. Demostreu que el tercer parell també ho és.

**15C3.** La fórmula de de Moivre, vàlida per exponents naturals, és

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

És aplicable aquesta fórmula amb exponents racionals? En cas negatiu, tracteu d'obtenir-ne una generalització resolent l'equació

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{p/q} = \cos x + i\sin x.$$

**15C4.** Tenim tres bosses i cada una conté $n$ boles numerades $1, 2, \ldots, n$. S'extreu a l'atzar una bola de cada bossa. Siguin $x$, $y$, $z$ els números de les boles tretes. Calculeu la probabilitat que $x + y = z$.

**Nota:** *Durant el curs 1977-78 no es va celebrar Olimpíada Matemàtica.*

*Segona sessió. Abril de 1979.*

**15C5.** Siguin $\gamma_1$ i $\gamma_2$ dues circumferències exteriors i $r$ una recta exterior a les dues que les deixa en un mateix semiplà. Determineu els punts $P$ d'aquesta recta que tenen la propietat que les tangents traçades des de $P$ a les circumferències formin amb $r$ angles iguals.

**15C6.** Proveu que per tot enter positiu $n$, el nombre $a = 3^n - 2n^2 - 1$ és divisible per 8. Demostreu també que si $n$ no és múltiple de 3, el nombre $a$ definit abans, és divisible per 24.

**15C7.** Trobeu una funció $f$ definida a l'interval $[-3, 0]$, contínua, derivable i positiva, tal que:
a) Per $x = -1$ té un extrem relatiu.
b) L'àrea limitada pel gràfic de la funció, l'eix d'abscisses i les rectes $x = -3$ i $x = 0$ val 6 unitats d'àrea.
c) $f(-1) = 1$.

**15C8.** Trobeu el valor de $(1 + i\sqrt{3})^n - (1 - i\sqrt{3})^n$, essent $n$ un nombre natural múltiple de 3.

---

**Guanyadors:** Carles Casacuberta Vergés, Jorge Mas Trullenque, Carmen Sánchez Royo.

*Primera sessió. Juny de 1979.*

**15E1.** Calculeu l'àrea de la intersecció de l'interior de l'el·lipse

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

amb el cercle limitat per la circumferència $(x-2)^2+(y-1)^2=5$.

**15E2.** Cert professor d'Oxford, destinat als serveis de criptografia de l'espionatge britànic, paper interpretat per Dirk Bogarde a la pel·lícula, recruta el personal proposant petits exercicis d'atenció, com ara llegir mentalment una paraula al revés. Freqüentment ho fa amb el seu propi nom: SEBASTIAN s'ha de llegir NAITSABES.
Es pregunta si hi ha algun moviment del pla o de l'espai que transformi un d'aquests mots en l'altre, tal com apareixen escrits. I si s'hagues dit AVITO, com un cert personatge d'Unamuno? Expliqueu raonadament cada resposta.

**15E3.** Demostreu la igualtat

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

**15E4.** Si $z_1$, $z_2$ són les arrels de l'equació amb coeficients reals $z^2+az+b=0$, proveu que $z_1^n+z_2^n$ és un nombre real per a qualsevol valor natural de $n$. En el cas particular de l'equació $z^2-2z+2=0$ expresseu, en funció de $n$, aquesta suma.

**Nota:** *Durant el curs 1977-78 no es va celebrar Olimpíada Matemàtica.*

*Segona sessió. Juny de 1979.*

**15E5.** Calculeu la integral definida

$$\int_2^4 \sin\left((x-3)^3\right) dx.$$

**15E6.** Es col·loquen tres boles en una urna pel següent procediment: es tira una moneda tres vegades i s'introdueix, cada vegada que surt cara una bola blanca a l'urna, i cada vegada que surt creu, una bola negra. Extraiem d'aquesta urna, quatre vegades consecutives, una bola; la retornem a l'urna abans de l'extracció següent. Quina és la probabilitat que en les quatre extraccions obtinguem bola blanca?

**15E7.** Proveu que el volum d'un pneumatic (tor) és igual al volum d'un cilindre la base del qual és una secció meridiana d'aquell i que té per altura la longitud de la circumferència formada pels centres de les seccions meridianes.

**15E8.** Donat el polinomi

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots + 1001x^{500},$$

expresseu el valor numèric de la seva derivada d'ordre 325 al punt $x = 0$.

---

**Guanyadors:** Carles Casacuberta Vergés, Jesús Nievas Espuelas, Jorge Mas Trullenque.

*Primera sessió.*

**16C1.** Sabent que 75 bous mengen en 12 dies l'herba d'un prat de 60 àrees, i que 81 bous mengen en 15 dies l'herba d'un altre prat de 72 àrees, trobeu quants bous caldran per menjar en 18 dies l'herba d'un prat de 96 àrees. Se suposa que en els tres prats l'herba té la mateixa altura en el moment d'entrar-hi els bous i que continua creixent uniformement després que hi hagin entrat.

**16C2.** Tenim la paràbola $y = ax^2$ i dos dels seus punts $A$ i $B$ d'abscisses $x_1 < x_2$.
a) Calculeu, en funció de $x_1$, $x_2$ l'àrea del triangle $ABC$, essent $C$ el punt de la paràbola en el qual la tangent és paral·lela a la recta $AB$.
b) Aplicant reiteradament el procés anterior, calculeu l'àrea del segment de paràbola limitat per la corda $AB$.

**16C3.** Siguin $z$ i $w$ dos nombres complexos que compleixen la relació

$$w = \frac{az+b}{cz+d},$$

on $a$, $b$, $c$, $d$ són reals. Demostreu que si $ad - bc > 0$, llavors les parts imaginàries de $z$ i $w$ tenen el mateix signe.
(*Observació:* Calculeu $w - \overline{w}$, on $\overline{w}$ és el conjugat de $w$).

**16C4.** A $\mathbb{R}^3$ es considera el tetràedre $DABC$.
a) Demostreu que les rectes que uneixen cada un dels vèrtexs del tetràedre amb el baricentre de la cara oposada, es tallen en un punt $G$.
b) Demostreu que els vectors que uneixen el punt $D$ amb cada un dels baricentres de les cares del tetràedre que passen per $D$, són una base de l'espai vectorial dels vectors lliures de $\mathbb{R}^3$.
c) Calculeu les components del vector $DG$ respecte de la base de l'apartat b).

*Segona sessió.*

**16C5.** A partir de un significat geomètric de la integral definida, calculeu

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{-x^2 - 2x}\, dx.$$

**16C6.** Demostreu que si els costats d'un triangle estan en progressió geomètrica, la raó està compresa entre

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

**16C7.** En el congrés d'un partit polític hi assisteixen tots els afiliats, que són 2000 en total. Un periodista observa que, dels presents en una sessió, el $12.1212\ldots\%$ són dones, i el $23.423423\ldots\%$ pertanyen a la branca radical. Es demana el nombre d'afiliats que falten en aquesta sessió.

**16C8.** Es considera la successió recurrent

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2 \qquad \text{amb} \quad a_1 = 14.$$

Demostreu per inducció que, per a tot $n \geq 1$, el nombre

$$\sqrt{3(a_n^2 - 4)}$$

és un enter divisible per 4. Com a aplicació, demostreu que existeixen infinits triangles tals que els costats mesuren enters consecutius i l'àrea és també un nombre enter.

---

**Guanyadors:** *NO EN QUEDA CONSTÀNCIA A LA SCM.*

*Primera sessió.*

**16E1.** D'entre tots els triangles que tenen un costat de 5 m de longitud i l'angle oposat de $30°$, determineu el d'àrea màxima, calculant el valor dels altres dos angles i l'àrea del triangle.

**16E2.** Una urna conté els vots per a l'elecció de dos candidats $A$ i $B$. Se sap que el candidat $A$ té 6 vots segurs i el candidat $B$ en té 9. Trobeu la probabilitat que, en efectuar l'escrutini, sempre vagi per davent el candidat $B$.

**16E3.** Demostreu que si $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ són nombres reals positius, aleshores

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Digueu quan és vàlida la igualtat.

**16E4.** Trobeu la funció $f(x)$ que compleix l'equació

$$f'(x) + x^2 f(x) = 0$$

sabent que $f(1) = e$. Representeu gràficament aquesta funció i calculeu la tangent en el punt de la corba d'abscissa 1.

*Segona sessió.*

**16E5.** Demostreu que si $x$ és tal que

$$x + \frac{1}{x} = 2\cos\alpha$$

llavors, per a tot $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\alpha.$$

**16E6.** Demostreu que si al producte de quatre nombre naturals consecutius s'afageix una unitat, el resultat és un quadrat perfecte.

**16E7.** El punt $M$ varia sobre el segment $AB$ que mesura 2m.
a) Trobeu l'equació i la representació gràfica del lloc geomètric dels punts del pla les coordenades dels quals, $x$, $y$, són, respectivament, les àrees dels quadrats de costats $AM$ i $BN$.
b) Digueu quina classe de corba és. (Suggeriment: feu un gir d'eixos de $45°$).
c) Trobeu l'àrea del recinte comprés entre la corba obtinguda i els eixos de coordenades.

**16E8.** Determineu tots els triangles tals que les longituds dels tres costats i la seva àrea són quatre nombres naturals consecutius.

---

**Guanyadors:** Guillermo Rozas Rodríguez, Pedro Carrión Rodríguez de Guzmán, José Fernando López Blázquez.

*Primera sessió. 24 d'Abril de 1981.*

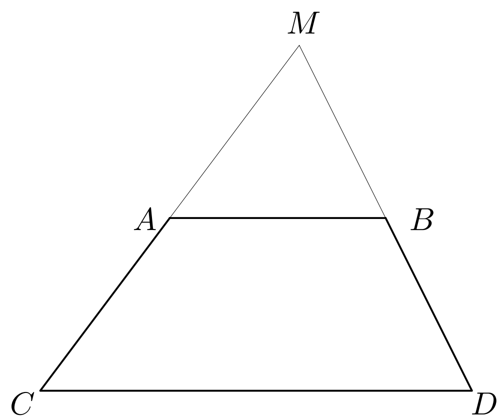
**17C1.** Tres nombres diferents posats en un cert ordre estan en progressió artimètica, i posats en un altre ordre estan en progressió geomètrica. Busqueu la raó d'aquesta progressió geomètrica.

**17C2.** Calculeu

$$\int_3^6 \left([x] + \sqrt{x - [x]}\right)\, dx,$$

on $[x]$ designa la part entera del nombre real $x$.

**17C3.** Un trapezi té els dos vèrtexs $C$, $D$ d'una base fixos. L'altra base $AB$ és de longitud constant i la suma de les longituds dels costats $CA$ i $DB$ també és constant. Trobeu la figura que descriu el punt $M$ intersecció de les rectes $CA$ i $DB$.



*Segona sessió. 25 d'Abril de 1981.*

**17C4.** Direm que un políedre és *regular* si totes les cares són polígons del mateix nombre $k$ de costats i a cada vèrtex hi concorren el mateix nombre $n$ d'arestes. Utilitzant que el nombre de cares menys el d'arestes més el de vèrtexs d'un políedre és sempre 2, demostreu que els únics políedres regulars són el tetràedre, l'hexàedre, l'octàedre, el dodecàedre i l'icosàedre.

**17C5.** Tres jugadors convenen que quan un perdi una partida donarà a cada un dels altres la quantitat de diners que en aquell moment tingui cada un. Després de jugar tres partides cada un d'ells en perd una i es retiren amb 40 duros cada un. Quants duros tenien en començar?

**17C6.** Sigui $A$ l'àrea d'un pentàgon regular i $a$ l'àrea del pentàgon format per les diagonals del primer. Demostreu que

$$a = A\left(\frac{\sin 18^\circ}{1 - 2\sin^2 18^\circ}\right)^2 .$$

---

**Guanyadors:** Josep M. Jiménez Figuera, Xavier Andreu Darrera, Magí Bosch Llovet.

*Primera sessió. Juny de 1981.*

**17E1.** Calculeu la suma de $n$ sumands

$$7+77+777+\cdots+7\ldots7.$$

**17E2.** Un vas de vidre cilíndric té 8 cm d'altura i la seva vora, 12 cm de circumferència. Al seu interior, a 3 cm de la vora, hi ha una diminuta gota de mel. En un punt de la superfície exterior, en el pla que passa per l'eix del cilindre i per la gota de mel, i situat a 1 cm de la base (fons) del vas, hi ha una mosca. Digueu quin és el camí més curt que ha de recórrer la mosca caminant per la superfície del vas, per tal d'arribar a la gota de mel. Trobeu també la longitud d'aquest camí.

**17E3.** Donades les rectes que es creuen $r$ i $s$, es consideren les rectes $u$ i $v$ tals que:
a) $u$ és simètrica de $r$ respecte de $s$,
b) $v$ és simètrica de $s$ respecte de $r$.
Determineu l'angle que han de formar les rectes donades per tal que $u$ i $v$ siguin coplanàries.

**17E4.** Calculeu la integral

$$\int \frac{dx}{\sin(x-1)\sin(x-2)}.$$

Suggeriment: Canvi $\tan x = t$.

*Segona sessió. Juny de 1981.*

**17E5.** Donat un nombre natural no nul $n$, sigui $f_n$ la funció de l'interval tancat $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ definida així:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & \text{si } 0 \le x < 1/n \\ 3/n, & \text{si } 1/n \le x \le 1. \end{cases}$$

a) Representeu gràficament la funció.

b) Calculeu $A_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

c) Trobeu, si eisteix, $\lim_{n\to\infty} A_n$.

**17E6.** Demostreu que la transformació producte de la simetria de centre $(0,0)$ per la simetria d'eix la recta d'equació $x = y+1$, pot expressar-se com a producte d'una simetria d'eix la recta $e$ per una translació de vector $\vec{v}$, amb $e$ paral·lela a $\vec{v}$. Determineu una recta $e$ i un vector $\vec{v}$ que compleixin les condicions indicades. Són únics $e$ i $\vec{v}$?

**17E7.** En una fàbrica de pilotes de tennis hi ha 4 màquines $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$, que produeixen, respectivament, el $10\%$, $20\%$, $30\%$ i $40\%$ de les boles que surten de la fàbrica. La màquina $m_1$ introdueix defectes en un $1\%$ de les boles que fabrica, la màquina $m_2$ en el $2\%$, la $m_3$ en el $4\%$ i la $m_4$ en el $15\%$. De totes les pilotes fabricades en un dia, se'n tria una a l'atzar i resulta ser defectuosa. Digueu quina és la probabilitat que aquesta bola hagi estat elaborada per la màquina $m_3$.

**17E8.** Si $a$ és un nombre senar, demostreu que

$$a^4 + 4a^3 + 11a^2 + 6a + 2$$

és una suma de tres quadrats i que és divisible per 4.

---

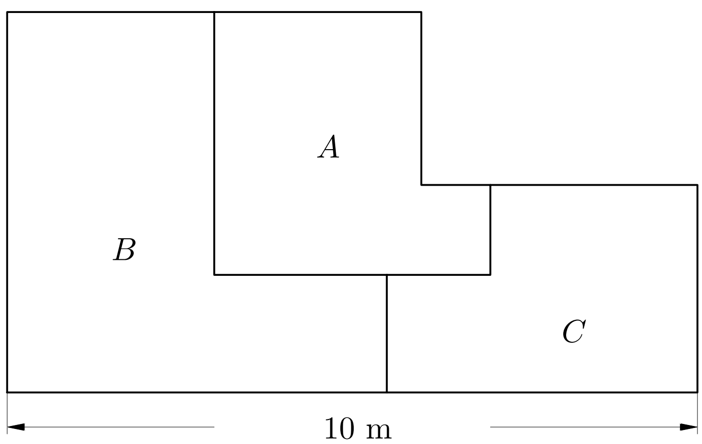
**Guanyadors:** Pablo Álvarez Royo-Villanova, Fernando Barbero González, Fernando Etayo Gordejuela.

*Primera sessió. 7 de Maig de 1982, tarda.*

**18C1.** Sabent que en un cert instant la busca petita d'un rellotge està entre les 10 i les 11, i la busca gran entre la 1 i les 2, i que al cap d'un cert temps les busques han intercanviat els seus llocs, calculeu el temps transcorregut entre aquests dos instants.

**18C2.** Un cos sòlid té per base un cercle de radi $r$ i tota secció ortogonal a un diàmetre fix és un triangle equilàter. Calculeu:
a) la naturalesa de la corba que determina el llom del sòlid;
b) el volum del cos.

**18C3.** Sabent que les figures $A$, $B$, $C$ del croquis són iguals, calculeu la seva àrea. (Tots els angles són rectes i els segment rectilinis.)



*Segona sessió. 8 de Maig de 1982, matí.*

**18C4.** Un safareig té tres aixetes $A$, $B$ i $C$. Si obrim $A$ i $B$ el safareig s'omple en dues hores, si obrim $A$ i $C$ s'omple en tres hores i si obrim $B$ i $C$ s'omple en sis hores. Quant tardaria a omplir-se el safareig si les obrim totes tres alhora?

**18C5.** Quatre esferes descansen totes sobre un mateix pla. Cada esfera és tangent a les altres tres. Se sap que tres de les esferes tenen el mateix radi $R$. Es demana el radi $r$ de la quarta esfera en funció de $R$.

**18C6.** Tenim $n$ boles i sabem que comptades de 8 en 8 en queden 7, comptades de 9 en 9 en queden 8 i comptades de 10 en 10 en queden 9. Podem saber quantes en queden comptades de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5, de 6 en 6 i de 7 en 7?

---

**Guanyadors:** Pere Colet Rafecas, Pere Gutiérrez Serrés, Andrés Rodríguez Belmar.

*Primera sessió. Juny de 1982.*

**18E1.** A la pàgina de passatemps d'un diari es proposa el passatemps següent: "Dos nens, Antoni i Josep, tenen 160 tebeos. Antoni compta els seus de 7 en 7 i li'n sobren 4. En Josep compta els seus de 8 en 8 i també li'n sobren 4. Quants tebeos tenen cada un?" Al següent número del diari es dóna la solució: "L'Antoni té 60 tebeos i en Josep en té 100." Analitza aquesta solució i indica què faria una matemàtic amb aquest problema.

**18E2.** En compondre una simetria d'eix $r$ amb un gir d'angle recte al voltant d'un punt $P$ que no pertany a la recta, resulta un moviment $M$.
És $M$ una simetria axial? Hi ha alguna recta invariant per $M$?

**18E3.** Es llança un coet i arriba als 120 m d'altura; a la caiguda perd 60 m, a continuació recupera 40 m, torna a perdre'n 30, a guanyar-ne 24, a perdre'n 20, etc. Si el procés segueix indefinidament, a quina altura tendeix a estabilitzar-se?

**18E4.** Determineu un polinomi de coeficients reals no negatius que compleixi les dues condicions següents:

$$p(0) = 0, \qquad p\big(|z|\big) \leq x^4 + y^4,$$

essent $|z|$ el mòdul del nombre complex $z = x + iy$.

*Segona sessió. Juny de 1982.*

**18E5.** Construïu un quadrat coneixent la suma de la diagonal i el costat.

**18E6.** Demostreu que si $u$, $v$ són nombres reals no negatius qualssevol, i $a$, $b$ nombres reals positius tals que $a + b = 1$, aleshores

$$u^a\, v^b \leq au + bv.$$

**18E7.** Sigui $S$ el subconjunt de nombres racionals que es poden escriure en la forma $a/b$, on $a$ és un enter qualsevol i $b$ un enter senar. Digueu si la suma i el producte de dos elements de $S$ també hi pertanyen. Digueu si a $S$ hi ha elements tals que l'invers també hi pertany.

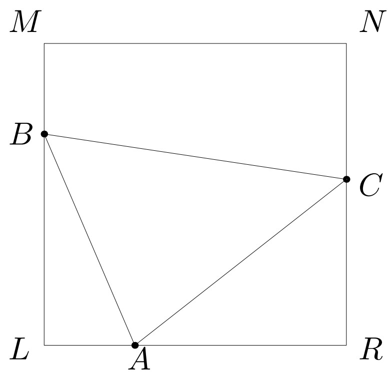
**18E8.** Donat un conjunt $C$ de punts del pla, s'anomena distància d'un punt $P$ del pla al conjunt $C$ a la més petita de les distàncies de $P$ a cada un dels punts de $C$. Siguin els conjunts $C = \{A, B\}$, amb $A = (1, 0)$ i $B = (2, 0)$; i $C' = \{A', B'\}$ amb $A' = (0, 1)$ i $B' = (0, 7)$, en un sistema de referència ortogonal.
Trobeu i dibuixeu el conjunt $M$ de punts del pla que equidisten de $C$ i $C'$.
Estudieu si és derivable la funció que té per gràfic el conjunt $M$ obtingut abans.

---

**Guanyadors:** Javier Caballero Guerrero, José Sánchez Lacuesta, Patrik Simonetta.

*Primera sessió. 17 de Desembre de 1982, de 16 h a 20 h.*

**19C1.** Sobre un quadrat $LMNR$ de costat 1 tenim tres punts $A$, $B$, $C$ tals que les figures $ALB$, $ARC$ i $BMNC$ tenen la mateixa àrea. Calculeu l'àrea màxima i mínima del triangle $ABC$.




**19C2.** Determineu els nombres naturals $n$ que divideixen tots els nombres naturals les darreres xifres dels quals són exactament les xifres de $n$.

**19C3.** Demostreu que si $0 < t < \pi$ aleshores $\sin(t/2) > t/\pi$.

**19C4.** Es posa una rata en una caixa que té quatre sortides aparentment iguals. Una de les sortides es considera *bona* i es altres *dolentes*; si la rata tria una sortida dolenta, rep una decàrrega elèctrica que no la deixa sortir. Es demana quina és la probabilitat que la rata surti de la caixa en un màxim de tres intents, considerant:

a) que la rata no té memòria;

b) que la rata té memòria.

*Segona sessió. 18 de Desembre de 1982, de 9 h a 13 h.*

**19C5.** Digueu en quants zeros acaba el nombre 1000!

**19C6.** Digueu quina condició han de complir els nombres complexos $\alpha$ i $\beta$ per tal que els punts $\alpha$, $\beta$, $\alpha+\beta$ i $\alpha\beta$ siguin vèrtexs d'un paral·lelogram.

**19C7.** Sigui $O$ l'ortocentre d'un triangle (és a dir, el punt d'intersecció de les altures), i $A$ i $B$ els punts d'intersecció d'una altura amb el costat corresponent i amb la circumferència circumscrita al triangle, respectivament. Hi ha alguna relació entre els segments $OA$ i $OB$?

**19C8.** Determineu el volum mínim $V_n$ d'una piràmide regular recta de $n$ costats circumscrita a una esfera donada. Calculeu

$$\lim_{n\to\infty} V_n.$$

---

**Guanyadors:** Xavier Santallúcia Esbert, Josep Burillo Puig.

*Primera sessió. Febrer de 1983.*

**19E1.** Mentre Teofrast parlava amb Aristòtil sobre la classificació de les plantes, tenia un gos lligat a una columna cilíndrica de radi $r$ perfectament llisa, amb una corda molt fina que envoltava la columna i amb un llaç de baga escorredora. El gos estava lligat a l'extrem lliure de la corda. En intentar arribar a Teofrast, el gos va tibar la corda i la trencà. Digueu quina era la distància de la columna al nus en el moment de trencar-se.

**19E2.** Construïu un triangle coneixent un angle, la raó dels costats que el formen i el radi del cercle inscrit.

**19E3.** Una semicircumferència de radi $r$ es divideix en $n+1$ parts iguals i s'uneix un punt qualsevol $k$ de la divisió amb els extrems de la semicircumferència, formant així un triangle $A_k$. Calculeu el límit, quan $n$ tendeix a infinit, de la mitjana aritmètica de les àrees dels triangles.

**19E4.** Determineu el nombre d'arrels reals de l'equació

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + m = 0.$$

*Segona sessió. Febrer de 1983.*

**19E5.** Trobeu les coordenades dels vèrtexs d'un quadrat $ABCD$, sabent que $A$ és sobre la recta $y - 2x - 6 = 0$, $C$ és sobre $x = 0$ i $B$ és el punt $(a, 0)$, essent $a = \log_{2/3}(16/81)$.

**19E6.** En una cafeteria, un vas de llimonada, tres entrepans i set ensaïmades han costat 1 xelí i 2 penics; i un vas de llimonada, quatre entrepans i i 10 ensaïmades valen 1 xelí i 5 penics. Trobeu el preu de:

a) un vas de llimonada, un entrepà i una ensaïmada;

b) dos vasos de llimonada, tres entrepans i cinc ensaïmades.

(1 xelí = 12 penics).

**19E7.** Un tetràedre regular d'aresta 30 cm descansa sobre una de les seves cares i és buit per dintre. Es posa a l'interior 2 l d'aigua. Es demana l'altura de la superfície líquida i l'àrea de la superfície lliure de l'aigua.

**19E8.** L'any 1960, el més gran de tres germans té una edat que és la suma de les dels dos germans més petits. Uns anys després, la suma de les edats de dos dels germans és doble que l'edat de l'altre. Han passat ara un nombre d'anys des de 1960, que és igual a dues terceres parts de la suma de les edats que els tres germans tenien el 1960, i un d'ells té 21 anys. Quina edat tenen els altres dos?

---

**Guanyadors:** Josep Burillo Puig, Roberto Selva Gomis, Francisco J. Díez Vegas, José Marañón Mora.

*Primera sessió. 16 de Desembre de 1983, de 16 h a 20 h.*

**20C1.** Trobeu totes les funcions $f$, definides en el conjunt dels nombres reals estrictament positius, que prenen valors reals estrictament positius, i que compleixen

1) $f\big(xf(y)\big) = yf(x)$ per a tot $x, y$ positius.
2) $f(x) \to 0$ si $x \to +\infty$.

**20C2.** Determineu els triangles tals que l'altura i la mitjana concurrents en un vèrtex divideixen l'angle en tres parts iguals.

**20C3.** Demostreu que si la funció $f(x)$ és contínua, positiva i decreixent per a $x \geq 0$, i compleix

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)\,dt = S,$$

aleshores

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0.$$

*Segona sessió. 17 de Desembre de 1983, de 9 h a 13 h.*

**20C4.** Donat un triangle $ABC$, considerem el triangle $A_1B_1C_1$ que té els vèrtexs sobre els costats oposats a $A$, $B$ i $C$, respectivament, i els seus costats són perpendiculars als costats del primer triangle. Calculeu la raó de les àrees dels dos triangles en funció dels angles del triangle $ABC$.

**20C5.** Trobeu el mínim nombre natural $m$ tal que $m!$ és divisible per $7^{1983}$.

**20C6.** Donat un triangle equilàter, considerem les rectes que passen pel punt mitjà d'un costat. Estudieu la variació de la longitud dels segments d'aquestes rectes interceptats pel triangle.

---

**Guanyadors:** *NO EN QUEDA CONSTÀNCIA A LA SCM.*

*Primera sessió. Febrer de 1984.*

**20E1.** En una posició $O$ d'un aeroport de campanya hi ha un canó que pot girar $360°$. Dos tancs ataquen aquest lloc seguint trajectòries rectes $AB$ i $CD$ donades. Trobeu gràficament l'abast del canó sabent que la suma de les longituds dels segments de trajectòria dels tancs en els quals aquests estan sota el foc del canó, és una longitud donada $\ell$.

**20E2.** Determineu un nombre de cinc xifres tal que el seu quadrat acabi en les mateixes cinc xifres col·locades en el mateix ordre.

**20E3.** Donats dos nombres reals posiitius $p$, $q$ tals que $p+q=1$, i sabent que tot parell de nombres reals $x$, $y$ compleix $(x-y)^2 \geq 0$, es demana que demostreu

a) $$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

b) $$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

a) $$\left(p+\frac{1}{p}\right)^2 + \left(q+\frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

**20E4.** Calculeu
$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}.$$

*Segona sessió. Febrer de 1984.*

**20E5.** Portem arcs iguals $AB = A'B' = x$ sobre dues circumferències iguals a partir de dos punts fixos $A$, $A'$ sobre cada una d'elles. Trobeu el lloc geomètric dels punts mitjans del segment $BB'$ en variar $x$:

a) si posem els arcs en el mateix sentit,

b) si posem els arcs en sentits oposats.

**20E6.** Es considera una circumferència $\gamma$ de centre $(3,0)$ i radi 3, i la recta $r$ paral·lela a l'eix $Ox$ que dista 3 de l'origen. Es traça una recta variable per l'origen que talla $\gamma$ en el punt $M$ i talla la recta $r$ en $P$. Determineu el lloc geomètric dels punts d'intersecció de les paral·leles a $Ox$ i $Oy$ traçades per $M$ i $P$ respectivament.

**20E7.** Es consideren nombres naturals escrits en el sistema de base 10.

a) Trobeu el menor nombre que en suprimir-li la primera xifra quedi reduït a la cinquena part. Digueu com són els nombres que tenen aquesta propietat.

b) Demostreu que no existeix cap nombre tal que en suprimir-li la primera xifra quedi dividit per 12.

c) Formuleu un criteri general que ens permeti saber si un nombre pot quedar dividit per $k$ en suprimir-li la primera xifra.

**20E8.** Trobeu el residu de la divisió per $x^2 - 1$ del determinant

$$\begin{vmatrix} x^3+3x & 2 & 1 & 0 \\ x^2+5x & 3 & 0 & 2 \\ x^4+x^2+1 & 2 & 1 & 3 \\ x^5+1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

---

**Guanyadors:** Pablo Novaes Ledieu, Andrés García Parrilla, Miguel Aparisi Botella, Gonzalo Génova Fuster, Agustín Rafael Tejera Gómez, Miguel Brandt Sanz.

*Primera sessió. 18 de Gener de 1985, de 16 h a 20 h.*

**21C1.** Digueu quins són els triangles que poden ser dividits per una recta en dos triangles semblants.

**21C2.** La suma de dos nombres reals és igual a la suma dels seus quadrats. Digueu:
a) Els valors que pot tenir aquesta suma.
b) Els valors que poden tenir cada un dels nombres.
c) Si els dos nombres poden ser iguals.
d) El màxim de la diferència d'aquests dos nombres.

**21C3.** Resoleu l'equació

$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

*Segona sessió. 19 de Gener de 1985, de 9 h a 13 h.*

**21C4.** Demostreu que tot triangle pot subdividir-se en triangles acutangles.

**21C5.** Tres nombres diferents estan en progressió aritmètica i els seus quadrats estan en progressió geomètrica. Calculeu la raó de la progressió geomètrica.

**21C6.** Un hostal té infinites portes numerades amb els números 1, 2, 3, ... , i estan totes tancades. En aquest hostal hi ha infinits hostes que estan numerats també 1, 2, 3, ... , i tots són a passejar. Quan l'hoste $A$ torna a l'hostal obre totes les portes múltiples de $A$ que troba tancades i tanca totes les portes múltiples de $A$ que troba obertes. Digueu com estaran les portes quan hagin arribat tots els hostes.

---

**Guanyadors:** Ricardo Pérez Marco, Vicente Companys Ferran, Josep R. Mallafré Torra

*Primera sessió. Febrer de 1985.*

**21E1.** Sigui $\mathcal{P}$ el conjunt dels punts del pla i $f:\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ una aplicació que compleix les tres condicions següents:
a) $f$ és bijectiva.
b) Per cada recta $r$ del pla, $f(r)$ és una recta.
c) Per cada recta $r$, la recta $f(r)$ és paral·lela o coincident amb $r$.
Digueu quines possibles transformacions poden ser $f$.

**21E2.** Sigui $\mathbb{Z}$ el conjunt dels enters i $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ el conjunt de parells ordenats d'enters. La suma d'aquests parells es defineix

$$(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b'),$$

essent $(-a,-b)$ l'oposat de $(a,b)$.
Estudieu si existeix un subconjunt $E$ de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ que compleixi les condicions següents:
a) La suma de dos parells de $E$ també és a $E$.
b) El parell $(0,0)$ pertany a $E$.
c) Si $(a,b)$ no és $(0,0)$, llavors o bé $(a,b)$ pertany a $E$, o bé $(-a,-b)$ pertany a $E$, però no tots dos.

**21E3.** Resoleu l'equació

$$\tan^2 2x+2\tan 2x\,\tan 3x-1=0.$$

**21E4.** Considerem tres nombres naturals $a$, $b$, $c$ tals que la raó

$$\frac{a+b+c}{abc}$$

sigui l'invers d'un nombre $k$ enter positiu. Es demana que demostreu:
a) $a^3+b^3+c^3$ no és primer.
b) Per a cada $k\in\mathbb{N}$ existeixen ternes de naturals $a$, $b$, $c$ que compleixen les condicions.

*Segona sessió. Febrer de 1985.*

**21E5.** Trobeu l'equació de la circumferència que passa pels afixos de les solucions de l'equació

$$z^3 + (-1 + i)z^2 + (1 - i)z + i = 0.$$

**21E6.** Es consideren les semirectes no alineades $Ox$, $Oy$. Pel punt $A \in Ox$ es tracen parells de rectes $r_1$, $r_2$, antiparal·leles respecte a l'angle $xOy$; siguin $M$, $N$ les interseccions de $r_1$ amb $Oy$ i de $r_2$ amb $Ox$, respectivament. Sigui $P$ el punt d'intersecció de les bisectrius dels angles $AMy$, $ANy$. Trobeu el lloc geomètric de $P$ en variar $A$.

**21E7.** Donada l'equació $x^5 - px - 1 = 0$, estudieu el valor de $p$ que fa possible que existeixin dues solucions de l'equació, $x_1$, $x_2$, que a la vegada siguin solucions de $x^2 - ax + b = 0$, amb $a$, $b$ enters.

**21E8.** Direm que una matriu quadrada és de *suma constant* si la suma dels elements de cada fila, de cada columna, i de cada diagonal, són valors iguals. Anàlogament, una matriu quadrada és de *producte constant* si són iguals els productes dels elements de cada fila, de cada columna i de cada diagonal. Determineu les matrius quadrades d'ordre 3 sobre $\mathbb{R}$ que són, a la vegada, de suma i producte constant.

---

**Guanyadors:** Ricardo Pérez Marco, Ignacio Garijo Amilburo, Juan Acuarón Joven, Ana José Reguera López, José Luis Ansorena Barasoain, Antonio Gómez Amigo.

*Primera sessió. 29 de Novembre de 1985, de 16 h a 20 h.*

**22C1.** Siguin $A$ i $B$ dos subconjunts del conjunt del nombres naturals $\mathbb{N}$ que siguin una partició, és a dir, tals que $A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = \mathbb{N}$.
a) Demostreu que existeix un nombre natural $m$ tal que $m+5$ o $m+6$ pertanyen al mateix subconjunt que $m$.
b) Demostreu que existeixen infinits nombres que compleixen la propietat anterior.

**22C2.** Tres punts $A$, $B$, $C$ s'uneixen per segments. Sobre la meitat del segment $AB$ es construeix un quadrat, sobre el segment $BC$ un altre quadrat, i sobre el segment $CA$ un rectangle de base $CA$ i altura 4 cm. L'àrea del rectangle supera en 20 cm$^2$ la suma de les àrees dels dos quadrats. Calculeu l'àrea del rectangle.

**22C3.** Calculeu la suma dels quadrats de les distàncies entre els afixos dels nombres complexos que són solucions de l'equació

$$z^{1985} - 1 = 0.$$

**22C4.** Trobeu el polinomi $p(x)$ de grau mínim tal que $p(x)+1$ sigui divisible per $(x-1)^4$ i $p(x)-1$ sigui divisible per $(x+1)^4$.

*Segona sessió. 30 de Novembre de 1985, de 9 h a 13 h.*

**22C5.** Ordeneu de més gran a més petit els nombres

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$$

**22C6.** A un ball hi ha vuit nois i vuit noies que estan asseguts alternativament en fila. De quantes maneres es poden formar cinc parelles de ball si cada parella ha d'estar formada per un noi i una noia asseguts un al costat de l'altre.

**22C7.** Donats dos nombres naturals $p$ i $q$ primers entre ells, calculeu les sumes

$$\sum_{k=1}^{q-1} D\Big(\frac{kp}{q}\Big) \quad \text{i} \quad \sum_{h=1}^{p-1} D\Big(\frac{hq}{p}\Big),$$

on $D(a)$ indica la part decimal del nombre $a$.

**22C8.** Calculeu els nombre naturals $p$ i $q$ més petits tals que $1/p$ i $1/q$ siguin dos decimals periòdics purs de períodes $A$ i $B$, sabent que aquests períodes tenen el mateix nombre de xifres i el seu màxim comú divisor és 10989.

---

**Guanyadors:** Jaume Amorós Torrent, Joaquim Ortega Cerdà, Ramon Rebull Camarasa.

*Primera sessió. Febrer de 1986.*

**22E1.** Indicarem per $[x], \{x\}$ les parts entera i decimal del nombre real $x$. Definim una *distància* entre els nombres reals $x$ i $y$

$$d(x,y) = \sqrt{\big([x]-[y]\big)^2 + \big(\{x\}-\{y\}\big)^2}.$$

Determineu (com a unió d'intervals) el conjunt dels nombres reals que *disten* del nombre $3/2$ menys que $202/100$.

**22E2.** Un segment $d$ divideix el segment $s$ si existeix un natural $n$ tal que

$$nd = d + d + \overset{n}{\smile}\!\!\cdots + d = s.$$

a) Demostreu que si el segment $d$ divideix els segments $s$ i $s'$ amb $s < s'$, llavors divideix el segment diferència $s' - s$.
b) Demostreu que cap segment divideix el costat $s$ i la diagonal $s'$ d'un pentàgon regular (raoneu sobre el pentàgon regular els costats del qual estan continguts a les diagonals del pentàgon donat, i no feu càlculs numèrics).

**22E3.** Trobeu els valors de $n \in \mathbb{N}$ tals que $5^n + 3$ és una potència de 2 d'exponent natural.

*Segona sessió. Febrer de 1986.*

**22E4.** Indiquem per $m(a,b)$ la mitjana aritmètica dels nombres reals positius $a$ i $b$. Donada la funció real positiva $g$ que té la primera i la segona derivada positives, definim la *mitjana* $\mu(a,b)$ relativa a la funció $g$ mitjançant

$$2\,g\big(\mu(a,b)\big) = g(a) + g(b).$$

Digueu raonadament quina de les dues mitjanes $m$ i $\mu$ és més gran.

**22E5.** Considerem la corba $\Gamma$ definida per l'equació $y^2 = x^3+bx+b^2$, on la constant $b$ és un nombre racional no nul. Inscriviu a la corba $\Gamma$ un triangle tal que les coordenades dels vèrtexs siguin racionals.

**22E6.** Calculeu

$$\prod_{k=1}^{14} \cos\left(\frac{k\pi}{15}\right).$$

---

**Guanyadors:** Carlos Ueno Jacue, Alberto Garrido Arribas, Juan David González Cobas, Jaume Amorós Torrent, Joaquim Ortega Cerdà, Juan Cuenca González.

*Primera sessió. 22 de Novembre de 1986.*

**23C1.** Elevant $3+\sqrt{5}$ a la $n$-èsima potència s'obté un nombre de la forma $a+b\sqrt{5}$ amb $a$ i $b$ enters. Demostreu que

$$0 < a - b\sqrt{5} < 1.$$

**23C2.** Determineu els valors de $a$ que fan que la successió $a_1 = a$, $a_2 = a + a_1^2$, $a_3 = a + a_2^2$, ... , $a_n = a + a_{n-1}^2$, sigui creixent.

**23C3.** En un triangle $ABC$ de costats $a$, $b$, $c$, siguin $m_a$, $m_b$, $m_c$ les mitjanes que passen, respectivament, pels vèrtexs $A$, $B$, $C$. Se sap que $b/a = \sqrt{17/5}$ i que $m_c = 2m_b$. Calculeu l'angle que formen aquestes dues mitjanes i les relacions $c/a$ i $c/b$.

**23C4.** Els canvis de rasant de les autopistes es fan segons un perfil parabòlic $y = -ax^2$, amb $a > 0$.
a) Determineu el màxim valor de $a$ per tal que un observador de 1 m d'alçada amb visual tangent al punt més alt vegi un objecte de 0.1 m d'altura situat a 100 m de distància (Fig. 1).
b) Determineu el màxim valor de $a$ per tal que un observador de 1 m d'alçada situat a qualsevol lloc vegi un objecte de 0.1 m d'altura situat a 100 m de distància (Fig. 2).

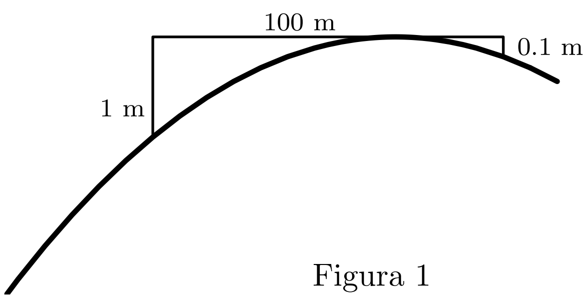



Figura 1

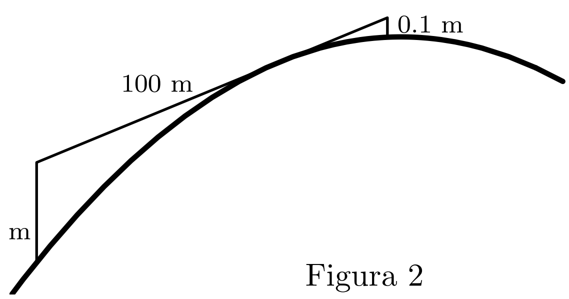



Figura 2

*Segona sessió. 23 de Novembre de 1986.*

**23C5.** Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = x[1/x]$ i representeu gràficament la seva restricció al conjunt $(-\infty, -1/4] \cup [1/4, \infty]$, si $[x]$ indica la funció *part entera* de $x$.

**23C6.** Digueu si es pot saber la data de naixement d'una persona sabent que ha nascut al segle XX, que la diferència entre l'any de naixement i 1900, més 100 vegades la suma del número del mes multiplicada per 40 i el número del dia és 13442.

**23C7.** Un tren té 88 m de longitud i un altre 92 m. Quan circulen en direccions oposades tarden 7.5 s a creuar-se, i quan circulen en la mateixa direcció en tarden 45. Trobeu la velocitat dels dos trens.

**23C8.** Trobeu dos nombre complexos $\alpha$ i $\beta$ tals que els afixos dels nombres $\alpha$, $\beta$, $\alpha/\beta$ i $\beta/\alpha$ siguin els vèrtexs d'un quadrat de diagonals $\alpha$, $\beta/\alpha$ i $\beta$, $\alpha/\beta$.

---

**Guanyadors:** Roman Bresson Carvallo, Àlex Haro Provinciale, Bruno Hernández.

*Primera sessió. Febrer de 1987.*

**23E1.** Siguin $a$, $b$, $c$ les longituds dels costats d'un triangle no isòsceles. Es donen tres cercles concèntrics de radis $a$, $b$ i $c$.
a) Digueu quin és el nombre de triangles equilàters d'àrees diferents que es poden construir, de manera que les rectes que contenen els costats siguin cada una tangent a un dels cercles.
b) Trobeu les superfícies d'aquests triangles.

**23E2.** Demostreu que per tot nombre natural $n > 1$ es compleix

$$1 \cdot \sqrt{\binom{n}{1}} + 2 \cdot \sqrt{\binom{n}{2}} + \cdots + n \cdot \sqrt{\binom{n}{n}} < \sqrt{2^{n-1}n^3}.$$

**23E3.** Un triangle donat $T$ es descompon en triangles $T_1$, $T_2$, ..., $T_n$ de manera que:
a) Cap parell de triangles $T_i$ té punts interiors en comú.
b) La unió dels triangles $T_i$ és $T$.
c) Tot segment que és costat d'algun triangle $T_i$, o bé és costat d'un altre triangle $T_j$, o bé es costat del triangle $T$.
Siguin $s$ el nombre total de costats (cada un comptat una sola vegada, encara que sigui comú a dos triangles), i $v$ el nombre total de vèrtexs (cada un comptat una sola vegada, encara que sigui comú a diversos triangles).
Demostreu que si $n$ és senar, existeixen diverses descomposicions d'aquesta mena, i totes tenen el mateix nombre $v$ de vèrtexs i el mateix nombre $s$ de costats. Expresseu $v$ i $s$ en funció de $n$. Demostreu també que si $n$ és parell no existeix cap descomposició.

*Segona sessió. Febrer de 1987.*

**23E4.** Si $a$ i $b$ són dos nombres reals diferents, resoleu el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ (ax + by)^2 &\leq a^2 x + b^2 y. \end{aligned}$$

Resoleu també el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ (ax + by)^4 &\leq a^4 x + b^4 y. \end{aligned}$$

**23E5.** En un triangle $ABC$ tenim punts $D$ i $E$ respectivament sobre $AB$ i $AC$. Coneixem la mesura dels angles indicats a continuació: $\widehat{ABE} = 30°$, $\widehat{EBC} = 50°$, $\widehat{ACD} = 20°$ i $\widehat{DCB} = 60°$. Trobeu el valor de l'angle $\widehat{EDC}$.

**23E6.** Per cada nombre natural $n$ considerem el polinomi

$$P_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1.$$

a) Demostreu que l'equació $P_n(x) = 0$ té una arrel $c_n$ i només una a l'interval $(0, 1)$.
b) Calculeu $\lim_{n\to\infty} c_n$.

---

**Guanyadors:** Fernando Galve Mauricio, Salvador Villegas Barranco, Santiago Vila Doncel, Juan R. Valderrama Alcalde, Pablo Benítez Giménez, Carlos J. Pérez Jiménez.

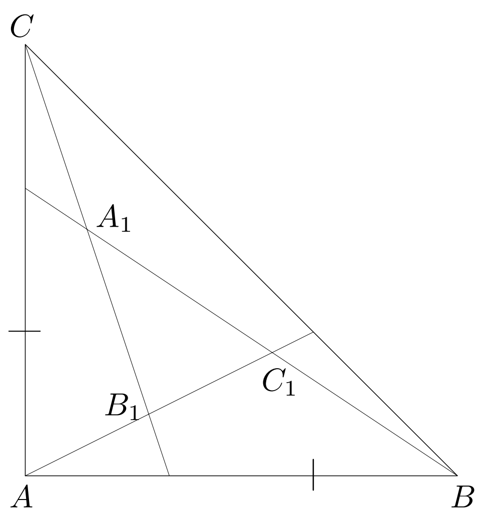
*Primera sessió. 11 de Desembre de 1987, de 16 h a 20 h.*

**24C1.** Determineu les potències de $(1+i)$ que són interiors a la corona circular determinada per les circumferències de centre $O=(0,0)$ i radis respectius 1000 i 10000.

**24C2.** Busqueu els nombres primers de la forma $n^4+4$, on $n$ és un nombre enter positiu.

**24C3.** Demostreu que per a qualsevol polinomi $p(x)$ existeix un nombre real $k$ tal que un dels dos polinomis $p(x)+k$ i $x\,p(x)+k$ no té cap arrel real i l'altre una de sola.

**24C4.** Donat un triangle rectangle isòsceles $ABC$, dividim cada un dels seus costats en tres parts iguals i tracem les rectes de la figura, que determinen un triangle $A_1B_1C_1$. Determineu l'àrea del triangle $A_1B_1C_1$ en funció de l'àrea del triangle $ABC$.
Què passa si el triangle rectangle $ABC$ no és isòsceles?
Què passa si el triangle $ABC$ és un triangle qualsevol?



*Segona sessió. 12 de Desembre de 1987, de 9 h a 13 h.*

**24C5.** Demostreu que si dos nombre enters són de la mateixa paritat (tots dos parells o tots dos senars), la meitat de la suma dels seus quadrats és una suma de dos quadrats.

**24C6.** Demostreu que l'equació

$$3^a + 1 = 5^b + 7^c$$

només admet les solucions enteres $a = 0,\ b = 0,\ c = 0$.

**24C7.** Per un punt de la vora d'un quadrat es tracen dues rectes que divideixen el quadrat en tres trossos de la mateixa àrea. Calculeu l'angle d'aquestes rectes en funció dels punts de la vora.

**24C8.** (a) Estudieu els intervals de creixement i decreixement de la funció

$$F(t) = \frac{\ln t}{t}.$$

(b) Comproveu que si $k \geq 3$ és enter, l'equació

$$(\ln x)^k = x$$

té exactament dues solucions més grans que $e$, diguem $r_k$ i $s_k$, $r_k < s_k$, i que

$$\lim_{k\to\infty} r_k = e \qquad \text{i} \qquad \lim_{k\to\infty} s_k = +\infty.$$

*Indicació:* En la resolució de l'apartat (b) tingueu en compte l'apartat (a).

---

**Guanyadors:** Boris Bartolomé Mana, Javier Campins Pascual, Jordi Campins Pascual.

*Primera sessió. Febrer de 1988.*

**24E1.** Sigui $(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, una successió de nombres enters tal que

$$x_1 = 1,$$
$$x_{n+1} > x_n, \text{ per } n \geq 1,$$
$$x_{n+1} \leq 2n, \text{ per } n \geq 1.$$

Demostreu que per tot enter natural $k$ existeixen dos termes de la successió $x_r$ i $x_s$ tals que $x_r - x_s = k$.

**24E2.** Sobre una circumferència s'elegeixen $n > 3$ punts i es numeren de $1$ a $n$ en qualsevol ordre. Direm que dos punts no consecutius $a$ i $b$ estan relacionats si en un dels dos arcs d'extrems $a$ i $b$, tots els punts estan marcats amb números de valor menor que els de $a$ i $b$.
Demostreu que el nombre de parells de punts relacionats és exactament $n-3$.

**24E3.** Demostreu que els binomis $25x + 31y$ i $3x + 7y$ són múltiples de 41 pels mateixos valors de $x$ i $y$.

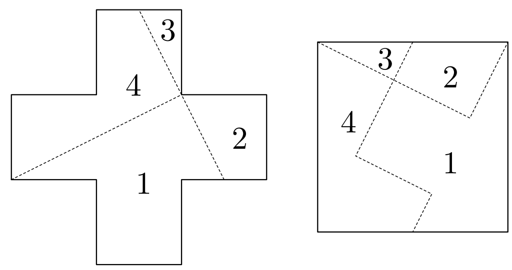
*Segona sessió. Febrer de 1988.*

**24E4.** S'atribueix al matemàtic renaixentista Leonardo da Pisa (més conegut com Fibonacci) la successió definida de la manera següent

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_i &= a_{i-1} + a_{i-2} \quad \text{per} \quad i > 2. \end{aligned}$$

Expresseu $a_{2n}$ en funció només dels tres termes $a_{n-1}$, $a_n$, $a_{n+1}$.

**24E6.** És molt conegut el *puzzle* consistent a descompondre la creu grega de l'esquerra de la figura en quatre parts amb les quals compondre un quadrat. Una solució habitual és la de la figura de la dreta. Demostreu que hi ha una infinitat de solucions diferents.




Hi ha alguna solució que doni lloc a quatre parts iguals?

**24E7.** Calculeu, per qualsevol valor del paràmetre enter $t$, solucions enteres $x$, $y$ de l'equació

$$y^2 = x^4 - 22x^3 + 43x^2 + 858x + t^2 + 10452(t + 39).$$

---

**Guanyadors:** Javier Campins Pascual, Ramón Esteban Romero, Santiago Pérez-Cacho Fernando-Argüelles, José Ignacio Nogueira Coriba, Boris Bartolomé Mana, Fernando Martínez Puente.

*Primera sessió. 16 de Desembre de 1988, de 16 h a 20 h.*

**25C1.** Demostreu que si $n$ és un enter positiu i $p$ és primer, aleshores $n^p - n$ és múltiple de $p$.

**25C2.** Dos mòbils es desplacen amb velocitat constant al llarg d'un circuit tancat. Si surten simultàniament d'un mateix punt en el mateix sentit, tornen a coincidir al cap de 100 s i el més ràpid ha de menester 10 s menys que l'altre per a fer una volta completa.
Quant de temps tardaran a creuar-se si surten simultàniament del mateix punt en sentits oposats?

**25C3.** Els extrems $A$ i $B$ d'un segment es mouen respectivament sobre dues rectes $r$ i $s$ que són perpendiculars. Descriviu la corba que recorre el punt $M$ del segment tal que $MA$ és la meitat de $MB$.

**25C4.** La societat *Peces de Ferro S.A.* té nou accionistes que han de triar en Joan o en Pere com a President. És sabut que sis d'ells votaran en Joan i els altres tres en Pere, i que en el moment d'emetre el vot, cada un ho farà públicament en veu alta.
Determineu la probabilitat que en Joan vagi sempre per davant en les votacions.

*Segona sessió. 17 de Desembre de 1988, de 9 h a 13 h.*

**25C5.** Considerem un conjunt $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ d'un nombre finit $n$ de nombres reals estrictament positius. Demostreu que per a tot $n \geq 2$ es compleix

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_nx_1} + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1x_2} \leq n - 1.$$

**25C6.** Si $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ són tres nombres complexos tals que els seus afixos determinen un triangle equilàter, demostreu que es compleix la igualtat

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

**25C7.** Demostreu, per cada enter positiu $n$, les desigualtats

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}.$$

Si $[x]$ representa la part entera del nombre $x$, determineu el valor de

$$\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10^6}}\right].$$

**25C8.** Descriviu totes les successions $(a_n)$ de nombres reals tals que

$$|a_n - a_m| \leq e^{-(n+m)}.$$

---

**Guanyadors:** Enrique García López, Jordi Casas Pla, Alberto Herrero Izquierdo

*Primera sessió. Febrer de 1989.*

**25E1.** El programa d'una assignatura consta de $n$ preguntes; l'examen consisteix en la resposta d'una pregunta triada a l'atzar. Un alumne només se sap una pregunta, però pot repetir l'examen $n$ vegades. Expresseu, en funció de $n$, la probabilitat $p_n$ que l'alumne aprovi l'examen. Digueu si $p_n$ és creixent o decreixent quan $n$ augmenta. Calculeu

$$\lim_{n\to\infty} p_n.$$

Calculeu la fita inferior màxima de les probabilitats $p_n$.

**25E2.** Els punt $A'$, $B'$, $C'$ dels costats $BC$, $CA$, $AB$ d'un triangle $ABC$ compleixen

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{BA'}{A'C} = \frac{CB'}{B'A} = k.$$

Les rectes $AA'$, $BB'$, $CC'$ formen un triangle $A_1B_1C_1$. Donats $k$ i l'àrea $S$ del triangle $ABC$, calculeu l'àrea del triangle $A_1B_1C_1$.

**25E3.** Demostreu que

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 99}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 100} < \frac{1}{10}.$$

*Segona sessió. Febrer de 1989.*

**25E4.** Demostreu que el nombre 1989 i totes les seves potències enteres $1989^n$ es poden escriure com a suma de dos quadrats de nombres enters positius, i com a mínim de dues formes diferents.

**25E5.** Sigui $\mathcal{D}$ el conjunt dels nombres complexos que es poden escriure de la forma $a + b\sqrt{-13}$, amb $a$, $b$ enters. El nombre $14 = 14 + 0\sqrt{-13}$ es pot escriure com a producte de dos elements de $\mathcal{D}$: $14 = 2 \cdot 7$. Expresseu 14 com a producte de dos elements de $\mathcal{D}$ de totes les maneres possibles.

**25E6.** Demostreu que donats *set* nombres reals qualssevol, se'n poden triar dos, diguem $a$ i $b$, de manera que

$$\sqrt{3}\,|a-b| < |1+ab|.$$

Doneu un exemple de *sis* nombres reals que no compleixein aquesta propietat.

---

**Guanyadors:** Vicente Muñoz Velázquez, Enrique García Lopez, Alberto García Martínez, Cristina Draper Fontanales, Leandro Marín Muñoz, Javier Portela Lemos.

*Primera sessió. 16 de Febrer de 1990, de 16 h a 20 h.*

**26C1.** Siguin $A$, $B$, $C$ els vèrtexs d'un triangle i $H$ l'ortocentre. Demostreu la igualtat

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}.$$

**26C2.** Demostreu que si les longitud $a$, $b$, $c$ dels costats d'un triangle compleixen $a < b < c$, aleshores l'angle $C$ oposat al costat $c$ compleix $\cos C < 1/2$.

**26C3.** Sigui $A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.
a) Demostreu que per a tot nombre natural $n$, el nombre $A_{n+3} - A_n$ és divisible per 7.
b) Calculeu el residu de dividir $A_{1990}$ per 7.

**26C4.** Donada la corba

$$y = x + \frac{1}{2x^2},$$

a) Calculeu l'àrea $S(t)$ limitada per la corba, la seva asímptota inclinada i les rectes $x = 1$ i $x = t$ $(t > 1)$.
b) Calculeu

$$\lim_{t \to \infty} S(t).$$

*Segona sessió. 17 de Febrer de 1990, de 9 h a 13 h.*

**26C5.** Resoleu a l'interval $[0, 2\pi]$ la inequació

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x > 0.$$

**26C6.** Un triangle rectangle $T_1$ té els costats en progressió geomètrica i un altre triangle rectangle $T_2$ els té en progressió aritmètica. Un costat del triangle $T_1$ és igual a un costat del triangle $T_2$. Calculeu el valor màxim i el valor mínim de

$$\frac{\text{àrea } T_1}{\text{àrea } T_2}.$$

**26C7.** Determineu els nombres complexos $z$ tals que els afixos dels nombres

$$z^{1989},\ z^{1990}, z^{1991}$$

siguin els vèrtexs d'un triangle rectangle isòsceles amb l'angle recte en el punt $z^{1990}$.

**26C8.** Esbrineu si és possible tenir un pla $P$, una esfera $E$ i un tetràedre regular $T$ tals que els plans paral·lels a $P$ o bé no tallin ni a l'esfera $E$ ni al tetràedre $T$, o bé els tallin en figures de la mateixa àrea.
Estudieu la mateixa qüestió si el tetràedre no és regular.

---

**Guanyadors:** Roberto Coll Francés, Gerard Montornés Ferret, Àngel Solores Girón.

*Primera sessió. 16 de Març de 1990.*

**26E1.** Siguin $x$ i $y$ dos nombres reals positius. Proveu que l'expressió

$$A = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$$

es pot escriure en la forma

$$B = \sqrt{x} + \sqrt{y + xy + 2y\sqrt{x}}$$

i compareu els nombres

$$L = \sqrt{3} + \sqrt{10 + 2\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad M = \sqrt{5 + \sqrt{22}} + \sqrt{8 - \sqrt{22} + 2\sqrt{15 - 3\sqrt{22}}}.$$

**26E2.** Cada punt d'un pla està pintat d'un color elegit entre tres de diferents. Es pregunta si existeixen necessàriament dos punts d'aquest pla que distin 1 cm i que estiguin pintats del mateix color.

**26E3.** S'anomena part entera d'un nombre real $a$ (i s'escriu $[a]$), el nombre enter més gran que sigui menor o igual que $a$. Si $n$ és un nombre natural, demostreu que la part entera de $(4 + \sqrt{11})^n$ és un nombre senar.

*Segona sessió. 17 de Març de 1990.*

**26E4.** Demostreu que la suma

$$\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{a+1}{2}-\frac{a+3}{6}\sqrt{\frac{4a+3}{3}}}$$

és independent del valor de $a$, per tot valor real $a \geq -3/4$, i trobeu-ne el valor.

**26E5.** Tres punts $A'$, $B'$, $C'$ estan situats, respectivament, sobre els costats $BC$, $CA$ i $AB$ d'un triangle donat $ABC$ d'àrea $S$, de manera que

$$\frac{AC'}{AB}=\frac{BA'}{BC}=\frac{CB'}{CA}=p,$$

essent $p$ un paràmetre variable, $0 < p < 1$. Determineu

1) L'àrea del triangle $A'B'C'$ en funció de $p$.

2) El valor de $p$ que fa mínima l'àrea anterior.

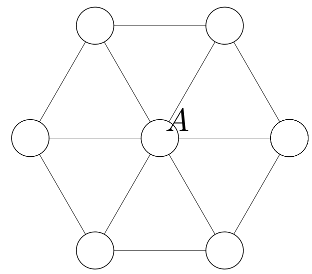
3) El lloc geomètric dels punts $P$ d'intersecció de les paral·leles traçades per $A'$ i $C'$, repectivament als costats $AB$ i $AC$, quan $p$ varia de 0 a 1.

**26E6.** Es consideren $n$ punts del pla de forma que no hi hagi dues parelles equidistants. Per cada punt es traça el segment que l'uneix al més proper. Demostreu que cap punt està unit a més de cinc punts.

---

**Guanyadors:** Francisco Ogando Serrano, Daniel Lasaosa Medarde, Marco Castrillón López, Javier Arregui García, José F. Herrador Barrios, José M. Gordillo Arias de Saavedra.

*Primera sessió. 14 de Desembre de 1990, de 16 h a 20 h.*

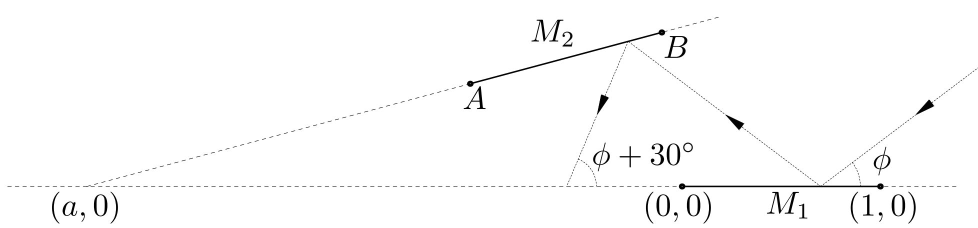



**27C2.** La figura adjunta representa un entramat de camins per on pot moure's una tortuga, la qual, a cada cruïlla, escull a l'atzar un qualsevol dels camins que pot seguir. Si deixem la tortuga lliure en el punt $A$, calculeu la probabilitat que torni a passar pel punt $A$ en menys de $n$ moviments.

**27C3.** Determineu quina condició han de complir les xifres de les desenes de dos nombres acabats en 6, per tal que el seu producte acabi en 36.

**27C4.** Siguin $r$ i $R$ dos rectangles d'àrea unitat, tals que el perímetre de $R$ és doble del perímetre de $r$. Siguin $d$ i $D$ les longituds de les diagonals de $r$ i $R$.
a) Demostreu que $2 < D/d \leq \sqrt{7}$.
b) Si $D = d\sqrt{5}$, determineu les longituds dels costats dels dos rectangles.

**27C5.** Prenem un sistema rectangular de coordenades al pla. Tenim un mirall $M_1$ unidimensional posat cara amunt sobre el segment d'extrems $(0,0)$ i $(1,0)$. Sobre la recta que passa per $(a,0)$ amb $a < 0$ i que té pendent $m > 0$ posem un mirall $M_2$ d'extrems $A$ i $B$ mirant cap avall. Determineu $a$, $m$ i els punts $A$ i $B$ per tal que es compleixi:
a) Tot raig que arriba a $M_1$ amb un angle $\phi$ respecte de la direcció de les $x$ positives, $30° \leq \phi \leq 45°$, és reflectit cap a $M_2$, es reflecteix a $M_2$ i no torna a trobar $M_1$. L'angle entre la direcció de les $x$ positives i el raig que arriba de $M_2$ és $\phi + 30°$.
b) La longitud de $M_2$ és mínima respecte a tots els possibles miralls que compleixen la condició anterior.



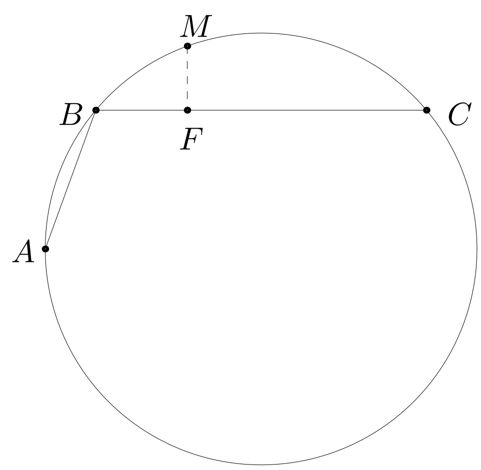
*Segona sessió. 15 de Desembre de 1990, de 9 h a 13 h.*

**27C6.** Trobeu els nombres de quatre xifres que són iguals al quadrat de la suma del nombre format per les dues primers xifres i el format per les dues darreres xifres.

**27C7.** Considereu un triangle equilàter inscrit en una circumferència de radi $1$. Li apliquem una rotació d'angle $\phi$ de centre el centre de la circumferència. Calculeu l'àrea comuna als dos triangles i el valor de l'angle $\phi$ que fa que l'àrea comuna sigui mínima.

**27C8.** Demostreu que tot nombre de la forma $2/n$, amb $n$ senar, es pot posar com a suma de dues fraccions unitàries (és a dir, de fraccions de numerador $1$.)
Deduïu-ne que tota fracció $m/n$, amb $n$ senar, admet una descomposició en suma de fraccions unitàries diferents. Comproveu també que si $m/n$ admet una descomposió en suma de $r$ fraccions unitàries diferents, n'admet una altra en suma de $s$ fraccions unitàries, per tot $s > r$.

**27C9.** Siguin $AB$ i $BC$ dues cordes d'un cercle ($AB < BC$) i sigui $M$ el punt mitjà de l'arc $ABC$. Sigui $F$ el peu de la perpendicular des de $M$ a la corda $BC$.
a) Proveu que $F$ és el punt mitjà de la *corda trencada*, és a dir, $AB + BF = FC$.
b) Useu el punt anterior per veure que $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.




**Guanyadors:** Roger Espel Llima, Ignasi Mundet Riera, Alejandro Lago Esteban.

*Primera sessió. 15 de febrer de 1991.*

**27E1.** Al pla, on s'ha pres un sistema de referència ortonormal, es consideren tots els punts $(m, n)$ tals que les seves coordenades són nombres enters. Suposem que s'hagin traçat tots els segments que uneixen parells qualssevol d'aquests punts i que tenen longitud entera. Proveu que no hi ha dos segments d'aquests que formin un angle de $45^\circ$.
Fem el mateix amb els punts $(m, n, k)$ de l'espai. Hi haurà algun parell de segments que formin un angle de $45^\circ$?

**27E2.** Siguin $a$ i $b$ enters diferents de $0$, $1$ i $-1$ i considerem la matriu

$$\begin{pmatrix} a+b & a+b^2 & a+b^3 & \cdots & a+b^m \\ a^2+b & a^2+b^2 & a^2+b^3 & \cdots & a^2+b^m \\ a^3+b & a^3+b^2 & a^3+b^3 & \cdots & a^3+b^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n+b & a^n+b^2 & a^n+b^3 & \cdots & a^n+b^m \end{pmatrix}.$$

Determineu un subconjunt $S$ de files d'aquesta matriu, el més petit possible, tal que qualsevol altra fila es pugui expressar com a suma de les files de $S$ multiplicades per nombres enters apropiats (és a dir, com a combinació lineal amb coeficients enters de les files de $S$.) Expliciteu aquestes combinacions lineals.

**27E3.** Suposem que l'equació $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ amb $r \neq 0$, admet tres arrels reals i positives. Determineu la relació que hi ha entre els nombres reals $p$, $q$ i $r$ per tal que les tres arrels puguin ser les longituds dels costats d'un triangle.

*Segona sessió. 16 de febrer de 1991.*

**27E4.** Siguin $A'$, $B'$ i $C'$ els punts de tangència dels costats $BC$, $CA$ i $AB$ d'un triangle amb la seva circumferència incrita. Sigui $D$ el punt d'intersecció de $C'A'$ amb la bisectriu de l'angle del vèrtex $A$. Calculeu el valor de l'angle $\widehat{ADC}$.

**27E5.** Donat un nombre natural $n$, indiquem per $s(n)$ la suma de les xifres del nombre $n$, expressat en el sistema de numeració binari, és a dir, el nombre de xifres 1 que té. Determineu, per a tot nombre natural $k$

$$\sigma(k) = s(1) + s(2) + \cdots + s(2^k).$$

**27E6.** Calculeu la part entera de

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}.$$

**Guanyadors:** Ignasi Mundet Riera, Roger Espel Llima, Marcos Durántez Gamzukoff, Ignacio Uriarte Tuero, Alberto Bravo de Mansilla Jiménez, Ignacio Marcos Primo.

*Primera sessió. 22 de Novembre de 1991, de 16 h a 20 h.*

**28C1.** Demostreu que el nombre que escrit en base $n$, $n \geq 8$ és 1367631, és un cub perfecte. En particular, calculeu l'arrel cúbica d'aquest nombre en base 10 i en base 1991.

**28C2.** Sigui $S$ el conjunt de les rectes que uneixen un punt del conjunt

$$A = \left\{ \left(0, \frac{1}{a}\right) \mid a \in \mathbb{N} \right\}$$

i un punt del conjunt

$$B = \{\ (b+1, 0)\ \mid b \in \mathbb{N}\}.$$

Demostreu que un nombre natural $m$ és compost si i només si el punt $M = (m, -1)$ està sobre una recta del conjunt $S$.
Determineu també el nombre de rectes del conjunt $S$ que passen per un punt $M = (m, -1)$ en funció del nombre natural $m$.

**28C3.** L'abscissa d'un punt que es mou sobre la part positiva de l'eix de les $X$ ve donada per

$$x(t) = 5(t+1)^2 + \frac{a}{(t+1)^5}$$

on $a$ és una constant positiva.
Quin és el mínim valor de $a$ pel qual $x(t) \geq 24$ per a tot $t \geq 0$?

**28C4.** Tenim dues circumferències $S_1$, $S_2$ iguals, de radi $R$, i tangents. Considerem la tangent comuna $r$, paral·lela a la recta que uneix els centres de $S_1$ i $S_2$.
Siguin $C_1$, la circumferència tangent a $r$, $S_1$ i $S_2$; $C_2$, la circumferència tangent a $C_1$, $S_1$ i $S_2$; $C_3$, la circumferència tangent a $C_2$, $S_1$ i $S_2$; etc.
S'obté així una família de circumferències $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ Demostreu que el diàmetre de la circumferència $C_n$ és

$$d_n = \frac{R}{n(n+1)}.$$

*Segona sessió. 23 de Novembre de 1991, de 9 h a 13 h.*

**28C5.** Per cada nombre natural $n$ escrivim

$$(1+\sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{2}$$

i així tenim dues successions de nombres enters

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \quad \text{i} \quad b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

a) Demostreu que $a_n$ i $b_n$ són senars per tot $n \in \mathbb{N}$.
b) Demostreu que $b_n$ és la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets

$$\frac{a_n+1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{a_n-1}{2}.$$

**28C6.** Siguin $z_1$, $z_2$, $z_3$ i $z_4$ nombres complexos de igual mòdul;
a) si $z_1+z_2+z_3=0$, què es pot dir de la figura formada pels afixos d'aquests tres nombres complexos?
b) si $z_1+z_2+z_3+z_4=0$, què es pot dir de la figura formada pels afixos d'aquests quatre nombres complexos ?

**28C7.** Sigui $p(n)$ el nombre de factors primers del nombre natural $n$. Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$

**28C8.** Sigui $ABC$ un triangle qualsevol. Exteriorment a ell es construeixen dos quadrats $BAEP$ i $ACRD$ de costats $AB$ i $AC$ respectivament. Siguin $M$ i $N$ els punts mitjans de $BC$ i $ED$. Demostreu que $AM$ és perpendicular a $ED$ i que $AN$ és perpendicular a $BC$.

---

**Guanyadors:** Francisco Hernández García, José M. Mondelo González.

*Primera sessió. 14 de Febrer de 1992.*

**28E1.** Un nombre $N$, múltiple de 83, és tal que el seu quadrat té 63 divisors. Trobeu $N$, sabent que és el nombre més petit que compleix les condicions anteriors.

**28E2.** Donades dues circumferències exteriors de radis $r$ i $r'$ $(r \neq r')$, es demana de dibuixar, raonadament, una recta paral·lela a una direcció donada, de tal manera que determini sobre les dues circumferències dues cordes tals que la suma de llurs longituds sigui igual a una longitud donada $\ell$.

**28E3.** Proveu que si $a$, $b$, $c$ i $d$ són nombres enters no negatius, i és

$$(a+b)^2 + 2a + b = (c+d)^2 + 2c + d, \tag{$*$}$$

necessàriament ha de ser $a = c$ i $b = d$.
Proveu la mateixa conclusió si, en lloc de (*) es compleix

$$(a+b)^2 + 3a + b = (c+d)^2 + 3c + d.$$

Vegeu que, en canvi, existeixen nombres enters no negatius $a \neq c$, $b \neq d$, tals que

$$(a+b)^2 + 4a + b = (c+d)^2 + 4c + d.$$

*Segona sessió. 15 de Febrer de 1992.*

**28E4.** Sigui la successió (progressió aritmètica)

$$3, 7, 11, 15, \ldots$$

Demostreu que en aquesta successió hi ha infinits nombres primers.

**28E5.** Dibuixat el triangle de vèrtexs $A$, $B$, $C$, es demana de determinar gràficament el punt $P$ tal que

$$\widehat{PAB} = \widehat{PBC} = \widehat{PCA}.$$

Expresseu una funció triginomètrica d'aquest angle $\widehat{PAB}$ en funció de les funcions trigonomètriques dels angles $A$, $B$ i $C$.

**28E6.** Donats un nombre natural $n > 0$ i un nombre complex $z = x + iy$ de mòdul unitat, $x^2 + y^2 = 1$, es pot complir o no la igualtat

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^n = 2^{n-1}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$

Fixat $n$ designarem per $S(n)$ el subconjunt de complexos de mòdul unitat pels quals es compleix la igualtat donada. Es demana

a) Calculeu raonadament $S(n)$, per $n = 2, 3, 4, 5$.

b) Fiteu superiorment el nombre d'elements de $S(n)$ en funció de $n$, per $n > 5$.

---

**Guanyadors:** Álvaro Begué Aguado, Javier Ribón Herguedas, José Miguel Atienza Riera, Raquel Barco Moreno, Vicente Giner Bosch, Manuel M. Aguado Martínez.

*Primera sessió. 11 de Desembre de 1992, de 16 h a 18 h 30 m.*

**29C1.** Demostreu que el nombre combinatori

$$\binom{1992}{1492}$$

no és múltiple de 500.

**29C2.** Proveu que si els nombres

$$\sin(b+c-a), \quad \sin(c+a-b) \quad \text{i} \quad \sin(a+b-c)$$

estan en progressió aritmètica, llavors també ho estan els nombres

$$\tan a, \quad \tan b \quad \text{i} \quad \tan c.$$

**29C3.** En un cercle de centre $O$ i radi 1 tracem una corda i construïm seguidament el semicercle que té com a diàmetre aquesta corda i no està contingut en el cercle inicial. Sigui $P$ el punt d'aquest semicercle que està més lluny del punt $O$. Quina longitud ha de tenir la corda per tal que la distància $OP$ sigui màxima?

**29C4.** Calculeu els límits

a)

$$\lim_{n\to\infty}\bigl(n-\sqrt{(n-1)n}\bigr).$$

b)

$$\lim_{n\to\infty}\bigl(n-\sqrt[3]{(n-1)n^2}\bigr).$$

*Segona sessió. 12 de Desembre de 1992, de 9 h a 13 h.*

**29C5.** Sobre una recta horitzontal construïm triangles equilàters de forma que les respectives bases són segments adjacents de longituds 1, 3, 5, 7, ... Demostreu que els vèrtexs superiors dels triangles estan sobre una paràbola.

**29C6.** Un rectangle es pot descompondre en 9 quadrats de costats 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 i 18. Calculeu els costats del rectangle.

**29C7.** El joc de daus americà es juga de la manera següent: el jugador va tirant successivament els daus fins que perd o guanya.
A la primera tirada guanya si la suma dels punts dels dos daus és 7 o bé 11, i perd si la suma de punts és 2, 3 o 12. Altrament anomenarem *el seu valor* la suma de punts que ha tret en la primera tirada.
A partir d'aquí tirarà els dos daus fins que tregui un 7, i llavors perdrà, o bé que tregui novament *el seu valor* i llavors guanyarà.
Calculeu la probabilitat que té un jugador de guanyar en aquest joc.

**29C8.** Sigui $A = 66^{66}$. Sigui $B$ la suma de les xifres de $A$, i $C$ la suma de les xifres de $B$. Calculeu la suma de les xifres de $C$.

---

**Guanyadors:** Roger Revilla Domingo, Daniel Marquès Solé, Marc Guinjoan Francisco.

# 1992-93 — XXIX Olimpíada Matemàtica — 29

## Segona fase (Espanya)

*Primera sessió. 26 de Febrer de 1993.*

**29E1.** En una reunió hi ha 201 persones de 5 nacionalitats diferents. Se sap que, a cada grup de 6, com a mínim 2 tenen la mateixa edat. Demostreu que hi ha al menys 5 persones del mateix país, de la mateixa edat i del mateix sexe.

**29E2.** Escrit el triangle aritmètic

$$\begin{array}{c}
0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \quad 1991 \quad 1992 \quad 1993 \\
1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad \ldots \quad 3983 \quad 3985 \\
4 \quad 8 \quad 12 \quad \ldots \quad 7968 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{array}$$

on cada nombre és igual a la suma dels dos que té al damunt (és evident que cada fila té un nombre menys que la fila anterior, i per tant, la darrera està formada per un únic nombre), raoneu el fet que l'últim nombre sigui múltiple de 1993.

**29E3.** Justifiqueu raonadament que a qualsevol triangle, el diàmetre de la circumferència inscrita no és més gran que el radi de la circumferència circumscrita.

*Segona sessió. 27 de Febrer de 1993.*

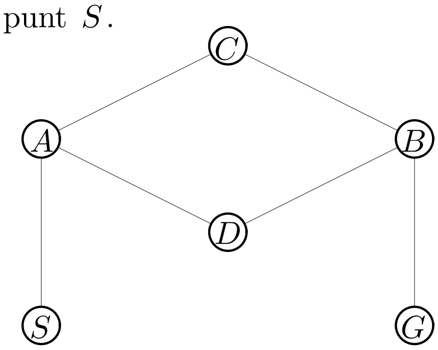
**29E4.** Demostreu que tot nombre primer $p$ diferent de 2 i de 5 té infinits múltiples escrits només amb uns (és a dir, de la forma $111\ldots1$).

**29E5.** Es donen 16 punts que formen una quadrícula com a la figura:

$$\begin{array}{cccccc} & \circ & \circ & \circ & \bullet & D \\ & \circ & \circ & \circ & \circ & \\ & \circ & \circ & \circ & \circ & \\ A & \bullet & \circ & \circ & \circ & \end{array}$$

De tots ells, se n'han destacat dos: $A$ i $D$. Es demana que fixeu, de totes les maneres possibles, dos altres punts $B$ i $C$ amb la condició que les 6 distàncies determinades pels quatre punts siguin totes diferents. En aquest conjunt de quaternes, s'ha d'estudiar:
1) Nombre de figures de 4 punts que existeixen amb les condicions de l'enunciat.
2) Figures que són geomètricament diferents, és a dir, no deduïbles una de l'altra per una transformació d'igualtat.
3) Si cada punt es designa per un parell d'enters $(X_i, Y_i)$, la suma $|X_i - X_j| + |Y_i - Y_j|$ estesa al sis parells $AB$, $AC$, $AD$, $BC$, $BD$, $CD$, és constant.

**29E6.** Una màquina de joc d'un casino té una pantalla on s'ofereix un esquema com el de la figura. En començar el joc apareix una bola al punt $S$.




A cada impuls del jugador, la bola es mou a cada un dels cercles immediats, amb la mateixa probabilitat per a cada un d'ells. La partida acaba quan té lloc per primera vegada un dels dos esdeveniments següents: (1) La bola torna a $S$, i el jugador perd. (2) La bola arriba a $G$, i llavors el jugador guanya. Es demana la probabilitat que el jugador guanyi, i la duració mitjana de les partides.

---

**Guanyadors:** Álvaro Begué Aguado, Miguel Carrión Álvarez, Antonio Rojas León, David Sevilla González, Antonio Sánchez Esguevillas, David Castell Burgaleta.

*Primera sessió. 14 de Gener de 1994, de 16 h a 20 h.*

**30C1.** Dues circumferències $C_1$ i $C_2$ es tallen en punts $A$ i $B$. Es pren un punt $M$ de $C_1$, exterior a $C_2$, i es tracen les rectes $MA$ i $MB$. Anomenem $A'$ i $B'$ els punts (diferents de $A$ i de $B$) en què aquestes rectes tallen respectivament la circumferència $C_2$. Demostreu que la longitud del segment $A'B'$ no depèn de la posició de $M$.

**30C2.** Demostreu que la funció

$$f(x) = 2\arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

és constant en el conjunt dels nombres reals tals que $x \geq 1$.

**30C3.** El nombre 9687600 es pot escriure com a producte de nombres enters consecutius, un dels quals és primer. Calculeu quins són aquests factors.

**30C4.** En una bossa hi ha $n$ boles numerades amb números de 1 a $n$.
a) Si traiem tres boles d'aquesta bossa, totes alhora, calculeu la probabilitat que no surti cap parella de números consecutius.
b) Si traiem $m$ boles d'aquesta bossa, totes alhora, demostreu que la probabilitat que no surti cap parella de números consecutius és

$$\frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

*Segona sessió. 15 de Gener de 1994, de 9 h a 13 h.*

**30C5.** Digueu quina relació hi ha d'haver entre les arestes d'un tetràedre per tal que les seves cares siguin triangles semblants no tots iguals.

**30C6.** Una successió de terme general $a_n$ compleix $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ per a $n > 2$. Se sap que la suma dels 1000 primers termes és 500, i que la suma dels 1000 següents és 2000. Calculeu la suma dels 1993 primers termes i el terme $a_{1994}$.

**30C7.** Sigui $P(x)$ un polinomi amb coeficients enters.
a) Comproveu que si $m$ i $n$ són nombres enters, llavors $P(m) - P(n)$ és divisible per $m - n$.
b) Demostreu que si hi ha tres nombres enters $a$, $b$ i $c$ tals que $P(a) = P(b) = P(c) = 2$, llavors $P(x) \neq 3$ per tot $x$ enter.

**30C8.** Calculeu totes les arrels complexes de l'equació

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$$

---

**Guanyadors:** Rubèn Albiol López, David Arso Civil, José Ramón Domingo Magaña, José Manuel Torrego Solana, Francesc Gassó Minguet, Mario Parra Kaiser.

*Primera sessió. 25 de Febrer de 1994.*

**30E1.** Demostreu que si entre els infinits termes d'una progessió aritmètica de nombres enters hi ha un quadrat perfecte, llavors infinits termes de la progressió són quadrats perfectes.

**30E2.** Sigui $O.XYZ$ un triedre trirectangle de vèrtex $O$ i arestes $X$, $Y$ i $Z$. Sobre l'aresta $Z$ es fixa un punt $C$ tal que $OC = c$. Sobre $X$ i $Y$ es consideren, respectivament, punts variables $P$ i $Q$ de manera que $OP + OQ$ sigui una constant donada $k$. Per a cada parell de punts $P$ i $Q$, els quatre punts $O$, $C$, $P$ i $Q$ determinen una esfera, el centre de la qual $W$, es projecta sobre el pla $OXY$. Raoneu quin és el lloc geomètric d'aquesta projecció. Raoneu també quin és el lloc geomètric de $W$.

**30E3.** Una Oficina de Turisme vol fer una enquesta sobre el nombre de dies asolellats i de dies de pluja al llarg d'un any. Per tal de fer-ho, demana informació a sis regions, les quals li transmeten la informació de la taula següent:

| *Regió* | *Sol o pluja* | *Inclassificable* |
|---|---|---|
| A | 336 | 29 |
| B | 321 | 44 |
| C | 335 | 30 |
| D | 343 | 22 |
| E | 329 | 36 |
| F | 330 | 35 |

La persona encarregada de l'enquesta, que té dades més detallades, no és imparcial. S'adona que prescindint d'una de les regions, la observació dóna un nombre de dies plujosos que és la tercera part del nombre de dies de sol. Digueu raonadament de quina regió ha de prescindir.

*Segona sessió. 26 de Febrer de 1994.*

**30E4.** L'angle $A$ d'un triangle isòsceles $ABC$ mesura $2/5$ de recte, i els angles $B$ i $C$ són iguals. La bisectriu de l'angle $C$ talla el costat oposat al punt $D$. Calculeu les mesures dels angles del triangle $BCD$. Expresseu la mesura $a$ del costat $BC$ en funció de la mesura $b$ del costat $AC$, sense que a l'expressió hi aparegui cap raó trigonomètrica.

**30E5.** Amb 21 fitxes de dames, unes de blanques i unes de negres, es forma un rectangle $3 \times 7$. Demostreu que sempre hi ha quatre fitxes del mateix color situades en els vèrtexs d'un rectangle.

**30E6.** Un polígon convex de $n$ costats es descompon en $m$ triangles amb interiors disjunts, de manera que cada costat d'aquests $m$ triangles ho és també d'altre triangle contigu o del polígon donat. Demostreu que $m + n$ és parell. Coneguts $m$ i $n$, trobeu el nombre de costats diferents que queden a l'interior del polígon i el nombre de vèrtexs diferents que queden en aquest interior.

---

**Guanyadors:** David Sevilla González, Tomás Baeza Oliva, Miguel Catalina Gallego, Alfonso Gracia Saz, Jerónimo Arenas García, Miguel A. Bermúdez Carro.

*Primera sessió. 13 de Gener de 1995, de 16 h a 20 h.*

**31C1.** Donat un triangle isòsceles de base 2 i altura 2, trobeu les paràboles tangents als costats iguals del triangle isòsceles tals que l'àrea que tanquin amb la base del triangle sigui màxima i mínima.

**31C2.** Sigui $N = abc_{(n}$ un nombre escrit en el sistema de numeració de base $n$, on $0 \leq a, b, c \leq n-1$ i on $a$, $b$, $c$ són diferents entre ells i de zero. Formeu els nombres en base $n$ que s'obtenen permutant de totes les maneres possibles les xifres $a$, $b$, $c$. Demostreu que la suma d'aquests nombres és divisible per $111_{(n}$. Generalitzeu l'enunciat del problema a nombres de $p$ xifres escrits en base $n$.

**31C3.** Donat un triangle $ABC$ i un punt $M$ sobre $AC$, busqueu un punt $N$ en un dels altres costats de manera que el segment $MN$ divideixi el triangle en dues parts que tinguin la mateixa àrea.

**31C4.** Tenim dos daus perfectes normals. Volem canviar les puntuacions de cadascuna de les cares dels dos daus de manera que les probabilitats d'aconseguir els resultats 2 a 12, llançant-los simultàniament, sigui la mateixa que s'esdevindria usant els dos daus donats inicialment. A les noves puntuacions dels daus es permet la repetició d'una mateixa puntuació en dues cares, així com la utilització de puntuacions superiors al 6, però no s'accepta pas el 0. És possible de fer això?

*Segona sessió. 14 de Gener de 1995, de 9 h a 13 h.*

**31C5.** Siguin $[a,b]$ i $[c,d]$ dos intervals tancats de $\mathbb{R}$. Siguin $x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_n$ nombres reals que compleixen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d.$$

Proveu que si cadascun dels $n^2$ rectangles de $\mathbb{R}^2$: $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $(0 \le i, j \le n-1)$ té un costat de longitud entera, llavors el rectangle gran $[a,b] \times [c,d]$ també té un costat de longitud entera.

**31C6.** Siguin $A$, $B$ i $C$ els tres angles d'un triangle.
a) Demostreu que es compleix la igualtat

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

b) Suposeu que tres arrels de l'equació polinòmica $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ són $\tan A$, $\tan B$ i $\tan C$, on $A$, $B$ i $C$ són els tres angles d'un triangle. Busqueu la quarta arrel en funció solament dels coeficients $p$, $q$, $r$, $s$ del polinomi.

**31C7.** Busqueu una fórmula general que permeti conèixer còmodament les hores en les quals la busca horària d'un rellotge i la minutera formen un angle recte. Comproveu aquesta fórmula general per a les 3 i les 9 hores.

**31C8.** Sigui $ABCD$ un rectangle, dividim el costat $AB$ en $p$ parts iguals i el costat $AD$ en $q$ parts iguals, amb $p$, $q$ enters senars, i considerem la quadrícula resultant.
a) Calculeu el nombre de camins de longitud mínima per la quadrícula que van del vèrtex $A$ al seu vèrtex oposat $C$.
b) Cadascun d'aquests camins tanca amb els costats $AB$ i $BC$ una certa àrea. Calculeu la suma d'aquestes àrees.
c) Si $m$ és la mitjana aritmètica d'aquestes àrees, es demana quants camins tanquen aquesta àrea $m$.

---

**Guanyadors:** Sergio Cabello Justo, Thomas Doumenc, Joaquim Puig Sadurní, Ferran Revilla Domingo, Ana de Mier Vinué.

*Primera sessió. 24 de febrer de 1995, de 16 h a 20 h.*

**31E1.** Es consideren conjunts $A$ de cent nombres naturals diferents, que tinguin la propietat que si $a$, $b$, $c$ són elements qualssevol (iguals o diferents) de $A$, existeix un triangle no obtusangle els costats del qual mesuren $a$, $b$ i $c$ unitats.
S'anomena $S(A)$ la suma dels perímetres considerats a la definició de $A$. Calculeu el valor mínim de $S(A)$.

**31E2.** Retallem diversos cercles de paper (no necessàriament iguals) i els estenem sobre una taula de manera que n'hi hagi alguns de superposats (amb part interior comuna), però de tal forma que no hi hagi cap cercle dins d'un altre.

Proveu que és impossible engalzar les peces que resulten de retallar les parts no superposades i compondre amb elles cercles disjunts.

**31E3.** Pel baricentre $G$ d'un triangle $ABC$ es traça una recta que talla el costat $AB$ en $P$ i el costat $AC$ en $Q$. Demostreu que

$$\frac{PB}{PA} \cdot \frac{QC}{QA} \leq \frac{1}{4}.$$

*Segona sessió. 25 de febrer de 1995, de 10 h a 13 h.*

**31E4.** Trobeu les solucions enteres de l'equació $p(x+y) = xy$ on $p$ és un nombre primer.

**31E5.** Demostreu que en cas que les equacions

$$x^3 + mx - n = 0$$
$$nx^3 - 2m^2x^2 - 5mnx - 2m^3 - n^2 = 0$$

($n \neq 0$), tinguin una arrel comuna, la primera tindrà dues arrels iguals, i determineu llavors les arrels de les dues equacions en funció de $n$.

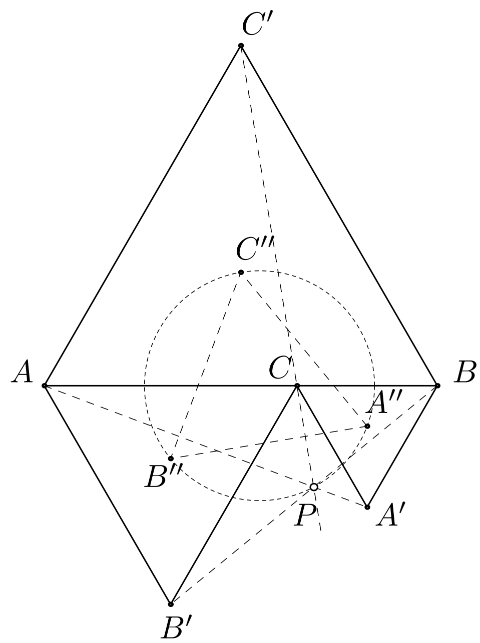
**31E6.** A la figura, $AB$ és un segment fix i $C$ un punt variable dins d'ell. Es construeixen triangles equilàters $ACB'$ i $CBA'$ de costats $AC$ i $CB$ en un mateix semiplà definit per $AB$, i un altre triangle equilàter $ABC'$ de costat $AB$ en el semiplà oposat. Demostreu:

a) Les rectes $AA'$, $BB'$ i $CC'$ són concurrents.

b) Si anomenem $P$ el punt comú a les tres rectes del punt a), trobeu el lloc geomètric de $P$ quan $C$ varia en el segment $AB$.

c) Els centres $A''$, $B''$ i $C''$ dels tres triangles formen un triangle equilàter.

d) Els punts $A''$, $B''$, $C''$ i $P$ són concíclics.




---

**Guanyadors:** Ángel Paredes Galán, Jerónimo Arenas García, Luis Fabiani Bendicho, Jaume Andreu Pascual, Alejandro García Gil, Ignacio Fernández Galván.

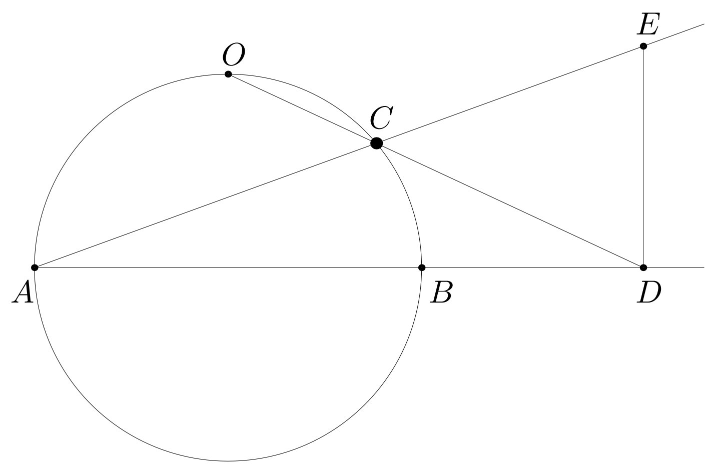
*Primera sessió. 15 de Desembre de 1995, de 16 h a 20 h.*

**32C1.** Un cert professor de matemàtiques va escriure a la pissarra un polinomi $f(x)$ amb coeficients enters i va dir: “Si al polinomi substituïm $x$ per l'edat del meu fill, que acaba de fer $a$ anys, obtenim la igualtat $f(a) = a$. A més, $f(0) = p$ és un nombre primer més gran que $a$.” Quants anys té el fill del professor?

**32C2.** Sigui $n$ un nombre natural. Trobeu el nombre més gran $k$ tal que en el conjunt $\{1, 2, \ldots, n\}$ poguem agafar un subconjunt $A$ de $k$ nombres que compleixi que si $x$, $y$, $z$ són nombres qualssevol de $A$, sempre sigui $x + y \neq z$.

**32C3.** Escollim un nombre natural $n$ i demanem a $r$ persones que escriguin un subconjunt de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Quina és la probabilitat que els $r$ subconjunts obtinguts siguin disjunts dos s dos?

**32C4.** Sigui $AB$ el diàmetre d'una circumferència, $O$ el punt mig d'un dels arcs que van de $A$ a $B$, i $C$ un punt qualsevol de l'arc $OB$. Dibuixem les rectes $AC$, $OC$, i sigui $D$ la intersecció de $OC$ amb $AB$. Sigui $DE$ perpendicular a $AD$ i $E$ la seva intersecció amb $AC$. Demostreu que els segments $BD$ i $DE$ tenen la mateixa longitud.



*Segona sessió. 16 de Desembre de 1995, de 9 h a 13 h.*

**32C5.** Calculeu un nombre de sis xifres sabent que passant-ne l'última al davant queda dividit per 3.

**32C6.** Calculeu el màxim comú divisor de

$$\binom{n}{k}, \binom{n+1}{k}, \ldots, \binom{n+k}{k},$$

on $n$ i $k$ són nombres naturals, $n \geq k$.

**32C7.** Demostreu que si un polígon inscrit en una circumferència de radi $r$ té costats de longituds $\ell_1$, $\ell_2$, ..., $\ell_n$, es compleix

$$\ell_1^2 + \ell_2^2 + \cdots + \ell_n^2 \leq 9r^2.$$

Determineu per quins polígons hi ha igualtat.

**32C8.** Donat un nombre natural $n$, sigui $p(n)$ el producte de les seves xifres. Demostreu que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = 0.$$

---

**Guanyadors:** Edgar Güeto de la Rosa, Raúl Martín Álvarez, Víctor Martínez de Albéniz Margalef, Sergi Elizalde Torrent, Joel Gabàs Masip, Lluís Tarafa Mate, Max Bernstein Obiols, Diego Pozo Tortosa.

*Primera sessió. 22 de febrer de 1996, de 16 h a 20 h.*

**32E1.** Els nombres naturals $a$ i $b$ són tals que

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$$

és un enter. Demostreu que el màxim comú divisor de $a$ i $b$ no és més gran que $\sqrt{a+b}$.

**32E2.** Sigui $G$ el baricentre del tringle $ABC$. Demostreu que si

$$AB+GC=AC+GB,$$

llavors el triangle és isòsceles.

**32E3.** Siguin $a$, $b$, $c$ tres nombres reals. Es consideren les funcions

$$f(x)=ax^2+bx+c \qquad \text{i} \qquad g(x)=cx^2+bx+a.$$

Sabent que

$$|f(-1)|\le 1, \quad |f(0)|\le 1, \quad \text{i} \quad |f(1)|\le 1,$$

proveu que si $-1\le x\le 1$, aleshores $|f(x)|\le 5/4$ i $|g(x)|\le 2$.

*Segona sessió. 23 de febrer de 1996, de 10 h a 13 h.*

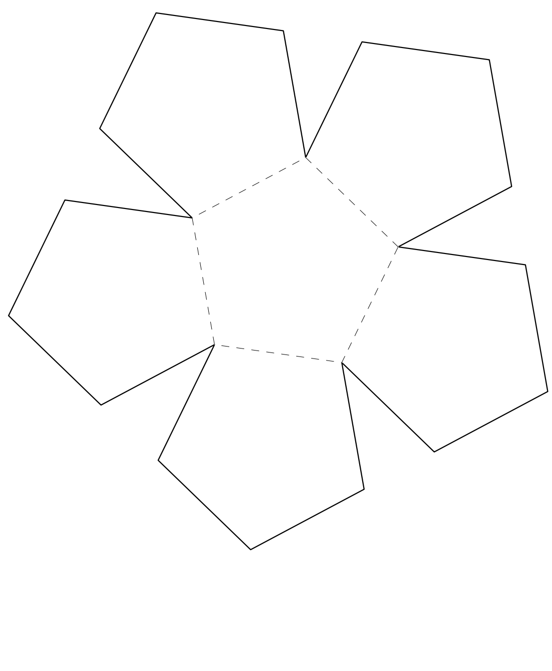
**32E4.** Discutiu l'existència de solucions reals $x$ de l'equació

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

segons els valors reals del paràmetre $p$, i resoleu-la en els casos que tingui solució.

**32E5.** A *Port Aventura* hi ha 16 agents secrets. Cada un d'ells vigila algun dels seus col·legues. Se sap que si l'agent $A$ vigila l'agent $B$, aleshores $B$ no vigila $A$. Sabem també que 10 agents qualssevol poden ser numerats de manera que el primer vigila el segon, aquest vigila el tercer, ... , el desè vigila el primer. Demostreu que també es poden numerar d'aquesta manera 11 agents qualssevol.

**32E6.** La figura adjunta es compon de sis pentàgons regulars de costat un metre. Es doblega per la línea de punts fins que coincideixen les arestes no puntejades que es tallen en un vèrtex. Quin volum d'aigua hi cap, al recipient així format?



---

**Guanyadors:** Sergi Elizalde Torrent, Tomás Palacios Gutiérrez, Fernando Rambla Blanco, Antonio Jara de las Heras, Patricia Sebastián Celorrio, Víctor Martínez de Albéniz Margalef.

*Primera sessió. 13 de Desembre de 1996, de 16 h a 20 h.*

**33C1.** Amb dos filferros de 1996 cm de llarg cadascun, dos filferros de 1997 cm de llarg cadascun i dos filferros 1998 cm de llarg cadascun, es construeix un tetràedre de manera que les sis arestes resulten ser tangents a una esfera. Raoneu en quina posició relativa hem situat les arestes.

**33C2.** Un rellotger molt de la broma té a l'aparador de la seva botiga un rellotge amb les dues busques — la *minutera* i l'*horària* — exactament iguals. Una persona que s'hi fixi una mica, quasibé sempre pot deduir quina és la busca horària i quina la minutera, i deduir, doncs, quina hora és. Tanmateix, però, en alguns casos això no és possible. Si en aquests casos s'escull a l'atzar una busca con a horària i l'altra com a minutera, i l'elecció és incorrecta, es cometrà un error en la lectura de l'hora. La diferència més curta entre l'hora llegida i l'hora real no por ser en cap cas superior a les 6 hores.
a) Descriviu les situacions en què no es pot saber quina hora és.
b) Estudieu quin és el màxim error que es pot arribar a cometre i a quines hores es produeix aquest màxim error.

**33C3.** En una bossa hi ha $n$ boles blanques numerades de 1 a $n$, $n$ boles blaves numerades de 1 a $n$ i $n$ boles groques numerades de 1 a $n$, essent $n \geq 4$. Es treuen 4 boles d'aquesta bossa totes alhora. Esudieu, segons els valors de $n$, quins dels esdeveniments següents és més difíil qu es doni, és a dir, té una probabilitat més petita:

$$A = \{\textit{treure les quatre boles del mateix color}\}$$
$$B = \{\textit{treure quatre boles amb números correlatius}\}$$
$$C = \{\textit{treure tres boles d'un mateix número i l'altra no}\}.$$

**33C4.** Sigui $\mathcal{C}$ un con recte de radi $r$ i altura $h$. Sigui $V$ el vèrtex del con i $AB$ un diàmetre de la base circular de centre $O$. Els plans $\mathcal{P}$ paral·lels a la generatriu $VA$ del con que tallen la base circular segons cordes $MN$ perpendiculars a $AB$, tallen la superfície cònica segons una paràbola. Trobeu la distància $d$ de la corda $MN$ al centre $O$ per tal que l'àrea de la intersecció de $\mathcal{P}$ amb $\mathcal{C}$ sigui màxima.

*Segona sessió. 14 de Desembre de 1996, de 9 h a 13 h.*

**33C5.** Al pla definim un sistema de coordenades rectangulars. Calculeu l'àrea del recinte solució del sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} |\sqrt{3}y - x| \leq 2x \\ x^2 + y^2 \quad \leq 2x. \end{cases}$$

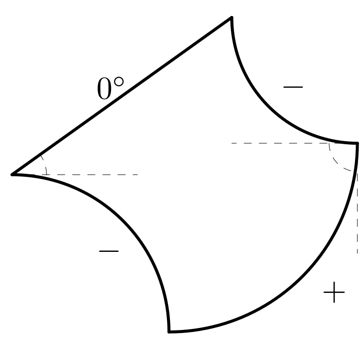
**33C6.** Busqueu els nombres complexos $\alpha$ tals que els afixos dels nombres $\alpha$, $\alpha^2$, $\alpha^3$, $\alpha^4$ siguin els vèrtexs d'un trapezi.

**33C7.** Hi ha una fórmula que dóna l'àrea $A$ d'un triangle del pla que els vèrtexs situats en punts de coordenades enteres com a funció lineal $A = aI + bC + dV$, on $I$ representa el nombre de punts de coordenades enteres que són interiors al triangle; $C$ el nombre dels que queden situats sobre els costats del triangle; i $V = 3$ és el nombre de vèrtexs de coordenades enteres. Deduïu-la, a partir de l'anàlisi d'alguns exemples, i demostreu-la.

**33C8.** Anomenarem *polígon mixtilini* una regió tancada del pla limitada per *costats* que poden ser segments o arcs de circumferència. Els *angles* del polígon mixtilini es mesuren en graus i són, en cada vèrtex, els que determinen els costats (cas que siguin segments), o les tangents traçades pel vèrtex als costats que siguin arcs.
Els *costats* del polígon es mesuren també en graus, de la manera següent:
1) segments: $0°$.
2) arcs amb la concavitat cap a l'interior del polígon: els graus que mesura l'arc, comptats positius.
3) arcs amb la concavitat cap a l'exterior del polígon: els graus que mesura l'arc, comptats negatius.
L'esquema il·lustra la manera de mesurar els costats i els angles d'un polígon mixtilini.
a) Demostreu que si en un polígon de $n$ costats els angles són $A_1, A_2, \ldots A_n$ i els costats són $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, llavors es compleix

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + (n-2)\,180°.$$

b) Demostreu que si els tres costats d'un *triangle* mixtilini tenen un punt en comú que no és un vèrtex, llavors $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.
c) Si tenim un *angle* mixtilini $A$ inscrit en una circumferència, calculeu $A$ en funció dels costats $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ del triangle que queda determinat a la circumferència.




**Guanyadors:** Xavier Pérez Giménez, Max Bernstein Obiols, Xavier Gratal Martínez.

*Primera sessió. 7 de Març de 1997, de 16 h a 20 h.*

**33E1.** Calculeu la suma dels quadrats dels cent primers termes d'una progressió aritmètica sabent que la suma de tots els termes val $-1$, i la suma dels que ocupen el lloc parell val $+1$.

**33E2.** Un quadrat de costat 5 es divideix en 25 quadrats unitat per mitjà de rectes paral·leles als costats. Sigui $A$ el conjunt dels 16 punts interiors, que són vèrtexs dels quadrats unitat, però que no estan en els costats dels quadrat inicial.
Digueu quin és el més gran nombre de punts de $A$ que es poden elegir de manera que *tres* qualssevol d'ells *no* siguin vèrtexs d'un triangle rectangle isòsceles.

**33E3.** Es consideren les paràboles $y = x^2 + px + q$ que tallen els eixos de coordenades en tres punts diferents, pels quals es fa passar una circumferència. Demostreu que totes les circumferències traçades en variar $p$ i $q$ a $\mathbb{R}$ passen per un punt fix, que cal determinar.

*Segona sessió. 8 de Març de 1997, de 9 h a 13 h.*

**33E4.** Sigui $p$ un nombre primer. Determineu tots els enters $k \in \mathbb{Z}$ tals que $\sqrt{k^2 - pk}$ és un enter positiu.

**33E5.** Demostreu que en un quadrilàter convex d'àrea unitat, la suma de les longituds de tots els costats i diagonals no és menor que $2(2+\sqrt{2})$.

**33E6.** Per fer una volta completa en un cotxe a un circuit circular, la quantitat exacta de benzina està distribuïda en dipòsits fixos situats en $n$ punts diferents qualssevol del circuit. Inicialment el dipòsit del cotxe està buit. Demostreu que qualsevol que sigui la distribució del combustible als dipòsits, sempre existeix un punt de sortida de forma que es pugui fer una volta completa.
Aclariments:
Se suposa que el consum és uniforme i proporcional a la distància.
El dipòsit del cotxe té capacitat suficient per tota la benzina.

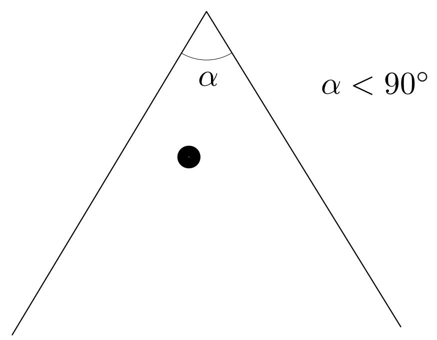
---

**Guanyadors:** Anatoli Segura Vélez, Miguel Lobo López, Mario Andrés Montes García, Max Bernstein Obiols, Joseba Villate Bejarano, Xavier Pérez Giménez.

*Primera sessió. 12 de Desembre de 1997, de 16 h a 20 h.*

**34C1.** Si $p(x)$ és un polinomi amb coeficients naturals del qual coneixem $p(1)$ i $p(p(1))$, com podem calcular els seus coeficients?

**34C2.** Tenim una bola en un billar defectuós amb una cantonada que fa un angle lleugerament inferior a $90°$ com a la figura. De quantes maneres podem llançar la bola (sense efecte) de forma que toqui les dues bandes i torni a la posició inicial? I si l'angle de la cantonada és superior a $90°$?




**34C3.** Siguin $s$ i $t$ nombres reals positius tals que $s < t$. Demostreu que hi ha exactament tres parelles de triangles $S$ i $T$ que compleixen:

1) $S$ i $T$ són semblants.

2) Les longituds dels costats de $S$ i de $T$ formen progressions aritmètiques de raons $s$ i $t$, respectivament.

3) La longitud d'un costat de $S$ és igual a la longitud d'un costat de $T$.

Comproveu també que el perímetre d'un dels tres triangles $S$ així obtinguts és igual a la suma dels perímetres dels altres dos.

**34C4.** Sigui $C$ la circumferència més gran que podem posar dins d'un quadrat $Q$. Comproveu que donat un nombre $\varepsilon > 0$ hi ha un nombre $r < \varepsilon$ tal que dins del quadrat podem posar-hi circumferències de radi $r$ (que no es tallin però que poden ser tangents) de manera que la suma de les àrees d'aquests cercles sigui igual a l'àrea del cercle $C$.

*Segona sessió. 13 de Desembre de 1997, de 9 h a 13 h.*

**34C5.** Trobeu els nombres $n$ que compleixen que la suma dels quadrats de $n$ enters consecutius qualssevulla sigui divisible per $n$. En particular, digueu quin és el més gran i el més petit d'aquests nombres que tenen dues xifres. (Es compleix que $1^2+2^2+\cdots+n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.)

**34C6.** • Demostreu que si el nombre $a$ o el nombre $b$ són naturals, llavors

$$0 = |\sin\pi(x+a)\,\sin\pi(y+b)| + |\sin\pi x\,\sin\pi y| - \\ - |\sin\pi x\,\sin\pi(y+b)| - |\sin\pi(x+a)\,\sin\pi y|.$$

• Si tenim un rectangle que es pot descompondre en una unió de rectangles més petits, tots ells de costats paral·lels als del rectangle gran i amb algun dels seus costats de longitud un nombre natural, demostreu que el rectangle gran també té algun dels seus costats de longitud un nombre natural.

**34C7.** Un tetràedre té les quatre cares que són triangles amb els costats en progressió aritmètica. La raó de la progressió aritmètica de dues cares és la mateixa. Digueu com són aquests tetràedres.

**34C8.**
Resoleu la següent equació

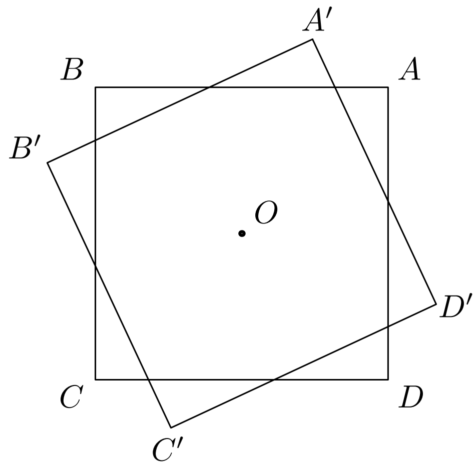
$$\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \arctan 3x.$$

---

**Guanyadors:** Marc Martínez de Albéniz Margalef, Lluís Acero Sistach, Xavier Gratal Martínez, Edgar González Pellicer, Aniol Llorente Saguer, Àngel Faus Tomás, Eduard Viladesau Franquesa, Antoni Conejero Cárceles.

*Primera sessió. 13 de Març de 1998, de 16 h a 20 h.*

**34E1.** Un quadrat $ABCD$ de centre $O$ i costat $\ell$ gira un angle $\alpha$ al voltant de $O$. Trobeu l'àrea comuna als dos quadrats.




**34E2.** Trobeu tots els nonbres naturals de quatre xifres, escrits en base 10, que siguin iguals al cub de la suma de les seves xifres.

**34E3.** Es considera un triangle $ABC$ i la circumferència circumscrita. Si $D$ i $E$ són punts sobre el costat $BC$ tals que $AD$ i $AE$ són, respectivament, paral·leles a les tangents en $C$ i $B$ a la circumferència circumscrita, demostreu que

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

*Segona sessió. 14 de Març de 1998, de 9 h a 13 h.*

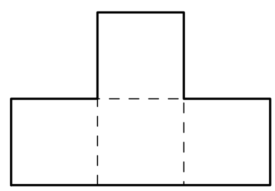
**34E4.** Trobeu les tangents dels angles d'un triangle sabent que són nombres enters positius.

**34E5.** Trobeu totes les funcions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictament creixents i tals que

$$f\big(n + f(n)\big) = 2f(n)$$

per $n = 1, 2, 3, \ldots$

**34E6.** Determineu els valors de $n$ per als quals és possible construir un quadrat $n \times n$ engalzant peces del tipus



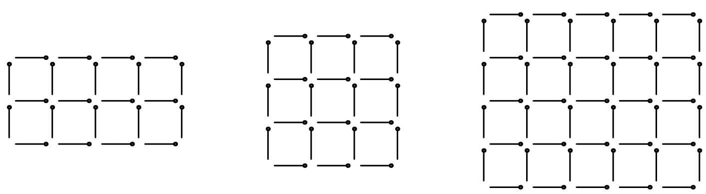
---

**Guanyadors:** Mario Andrés Montes García, Ramón José Aliaga Varea, David Martín Clavo, María Pe Pereira, Beatriz Sanz Merino, Jaime Vinuesa del Rio.

*Primera sessió. 11 de Desembre de 1998, de 16 h a 20 h.*

**35C1.** Determineu les possibles àrees dels tetràedres que tenen tres arestes de 2 metres i tres arestes de 3 metres.

**35C2.** Disposicions regulars com les de la figura:



contenen, respectivament, 22, 24 i 49 llumins. Algunes disposicions, com la de 24 llumins, són quadrades. A més, amb 22 llumins es poden fer dues disposicions diferents, amb 24 només una i amb 5 llumins no se'n pot fer cap.
a) Doneu una condició per a $n$ per tal que, donats $n$ llumins, sigui possibles fer alguna disposició rectangular com les de la figura.
b) Doneu una condició per a $n$ per tal que, donats $n$ llumins, sigui possible fer una disposició quadrada.
c) Doneu una condició per a $n$ per tal que, donats $n$ llumins, sigui possible fer només una única disposició.

**35C3.** Un bidó cilíndric, amb massa en buit $M$, conté una massa $m_0$ d'oli quan és ple. El centre de masses (o de gravetat, o baricentre) del bidó ple és en el punt mitjà de l'altura. En començar a buidar el bidó el centre de masses baixa. Però, quan el bidó és buit, torna a ser en el punt mitjà.
Quina massa d'oli hi ha al bidó quan el centre de masses és en el punt més baix?

**35C4.** Ens interessem per les parelles de funcions $f, g$ que compleixen:

$$\big(f(x)\,g(x)\big)' = f'(x)g'(x).$$

a) trobeu totes aquestes parelles en el cas $f = g$.
b) Trobeu totes les funcions $g$ quan $f(x) = x^n$, amb $n$ enter positiu.

*Segona sessió. 12 de Desembre de 1998, de 9 h a 13 h.*

**35C5.** Demostreu que el nombre de cares d'un políedre convex que tenen un nombre senar de costats és parell.
Demostreu també que la suma dels angles de totes les cares d'un políedre convex és $n\,360^\circ$, amb $n$ enter.

**35C6.** Proveu que si tenim 1998 punts en el pla de manera que no n'hi hagi tres d'alineats, aleshores hi ha 666 triangles disjunts que els tenen com a vèrtexs.

**35C7.** Determineu les longituds dels costats de tots els triangles rectangles amb costats de longitud entera, als quals es pot inscriure un cercle de radi 6.

**35C8.** Trobeu tots els nombres enters iguals a la suma dels quadrats de les seves xifres.

---

**Guanyadors:** Edgar González Pellicer, Joaquim Molera Vidal, Dario Mora Portela, M. Vinyes, Pere Menal Ferrer, Óscar Barenys García, Fèlix Llopart Miquel, Domènec Martín Martínez.

*Primera sessió. 12 de Març de 1999, de 16 a 20 hores.*

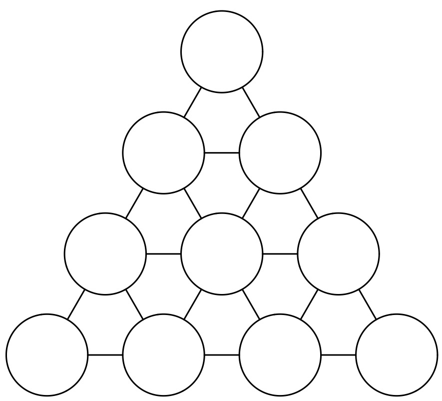
**35E1.** Les rectes $t$ i $t'$ tangents a la paràbola d'equació $y = x^2$ als punts $A$ i $B$ es tallen en el punt $C$. La mitjana del triangle $ABC$ corresponent al vèrtex $C$ té longitud $m$. Determineu l'àrea del triangle $ABC$ en funció de $m$.

**35E2.** Demostreu que existeix una successió d'enters positius $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ tal que

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

és un quadrat perfecte per a tot enter positiu $n$.

**35E3.** Sobre un tauler en forma de triangle equilàter amb $n$ files (tal com s'indica a la figura), es juga un solitari.
Sobre cada casella es col·loca una fitxa. Cada fitxa és blanca per un costat i negra per l'altre. Inicialment, només una fitxa, que està situada en un vèrtex, té la cara negra cap amunt; les altres fitxes tenen la cara blanca cap amunt. En cada moviment del joc es retira només una fitxa negra del tauler i es fa la volta a cada una de les fitxes que ocupen una casella veïna. (*Caselles veïnes* són les que estan unides por un segment.)
És possible treure totes les fitxes del tauler, després d'un cert nombre de moviments?



*Segona sessió. 13 de Març de 1999, de 9 a 13 hores*

**35E4.** Una caixa conté 900 targetes numerades del 100 al 999. Es treuen targetes a l'atzar (sense reposició) de la caixa i s'anota la suma dels dígits de cada targeta extreta. Quina és la menor quantitat de targetes que s'han de treure, per tal de garantir que al menys tres de les sumes siguin iguals?

**35E5.** El baricentre del triangle $ABC$ és $G$. Denotem per $g_a$, $g_b$, $g_c$ les distàncies des de $G$ als costats $a$, $b$, $c$, respectivament. Sigui $r$ el radi de la circumferència inscrita.

a) Demostreu que
$$g_a \geq \frac{2r}{3}, \quad g_b \geq \frac{2r}{3}, \quad g_c \geq \frac{2r}{3}.$$

b) Demostreu que
$$\frac{g_a + g_b + g_c}{r} \geq 3.$$

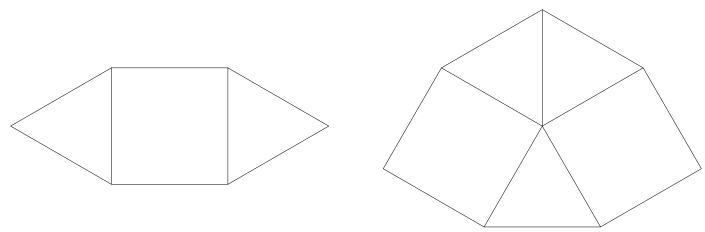
**35E6.** Es divideix el pla en un nombre finit de regions $n$ per mitjà de tres famílies de rectes paral·leles. No hi ha tres rectes que passin pel mateix punt. ¿Quin és el mínim nombre de rectes necessàries per tal que $n > 1999$?

---

**Guanyadors:** Ramón Aliaga Varea, Andrés Tallos Tanarro, Enrique Vallejo Gutiérrez, Álvaro Navarro Tobar, Javier Múgica de Ribera, Néstor Sancho Bejarano.

*Primera sessió. 10 de Desembre de 1999, de 16 h a 20 h.*

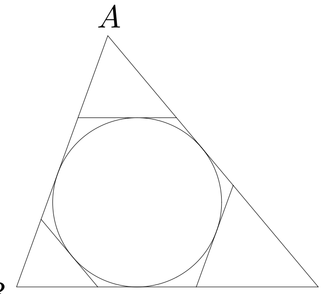
**36C1.** Amb quadrats i triangles equilàters de costat unitat es poden construir polígons convexos. Per exemple, es poden unir dos triangles i un quadrat per a formar un hexàgon, i tres triangles i dos quadrats per a formar un heptàgon, com es mostra al dibuix (la regió tancada pel polígon ha d'estar recoberta exactament pels quadrats i triangles utilitzats).



Quin és el nombre màxim de costats d'un polígon convex que es pot construir amb aquest mètode?

**36C2.** En un triangle $ABC$, el radi de la circumferència circumscrita és $R$. Es tracen tres rectes tangents a la circumferència inscrita i paral·leles als costats, que formen tres triangles més petits en els vèrtexs del triangle, com es veu a la figura. Si es radis de les circumferències circumscrites als tres triangles petits són $R_A$, $R_B$, $R_C$, demostreu que

$$R = R_A + R_B + R_C.$$




**36C3.** Un professor de matemàtiques va escriure a la pissarra el polinomi quadràtic $x^2 + 10x + 20$. Llavors cada alumne havia d'augmentar o disminuir en 1, o bé el terme constant, o bé el terme lineal. Finalment, va quedar escrit a la pissarra el polinomi $x^2 + 20x + 10$. Hi va haver en algun moment, escrit a la pissarra, un polinomi quadràtic amb zeros enters?

**36C4.** Tenim una calculadora que no funciona gaire bé. Només funcionen les tecles: $\boxed{+}$ (suma), $\boxed{-}$ (resta), $\boxed{1/x}$ (invers). Com podem calcular el producte de dos nombres reals amb aquesta calculadora?

*Segona sessió. 121 de Desembre de 1999, de 9 h a 13 h.*

**36C5.** Un tetràedre compleix que, per a cada vèrtex, la suma dels cosinus dels angles díedres de les tres arestes adjacents és 1. Demostreu que els díedres d'arestes oposades són iguals.

**36C6.** Si $n$ és un nombre natural i $2^{n+12}$ i $2^n$ denoten la mesura d'un angle expressada en graus, demostreu que

$$\sin(2^{n+12}) = \sin(2^n) \text{ si } n \geq 3.$$

Trobeu també el valor més petit de $n$ per al qual l'expressió $\sin(2^n)$ pren el valor més gran possible.

**36C7.** En el pla tenim $n$ rectes de les quals no n'hi ha tres que passin per un mateix punt. Aquestes rectes es tallen en 1999 punts.
a) Determineu el valor màxim i mínim de $n$.
b) Determineu els valors de $n$ més grans que 500.

**36C8.** Demostreu que si el producte de dos nombres positius és constant, la suma d'aquests dos nombres és mínima quan els nombres són iguals.
Trobeu el valor mínim de la funció

$$f(x) = \frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$$

a l'interval $0 < x < \pi$.

---

**Guanyadors:** Jordi Rius Pascual, Stephan Lesaffre, Miquel Oliu Barton, Xavier Martínez Palau, Juanjo Rué Perna, Joan Alemany Flos, Fabrice Lesaffre.

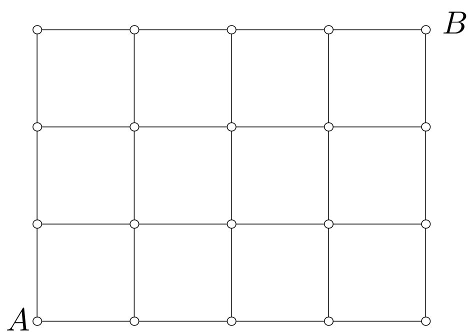
*Primera sessió. 30 de Març de 2000.*

**36E1.** Siguin els polinomis:

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1;$$
$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1.$$

Trobeu les condicions que han de complir els paràmetres reals $a$, $b$ y $c$, $(a \neq c)$, per tal que $P(x)$ y $Q(x)$ tinguin dues arrels comunes, i resoleu en aquest cas les equacions $P(x) = 0$; $Q(x) = 0$.

**36E2.** La figura mostra un planol amb carrers que delimiten 12 illes quadrades. Una persona $P$ va des de $A$ fins a $B$ y una altra $Q$ des de $B$ fins a $A$. Totes dues surten a la vegada seguint camins de longitud mínima amb la mateixa velocitat constant. A cada punt amb dues possibles direccions a seguir, totes dues tenen la mateixa probabilitat. Trobeu la probabilitat que $P$ i $Q$ es creuin.




**36E3.** Dues circumferències $C_1$ i $C_2$ de radis $r_1$ i $r_2$ es tallen en els punts $A$ i $B$. Per $B$ es traça una recta variable que talla altra vegada $C_1$ i $C_2$ en dos punts que designarem per $P_r$ i $Q_r$, respectivament.
Demostreu la següent propietat: Existeix un punt $M$, que depèn només de $C_1$ i $C_2$, tal que la mediatriu del segment $P_rQ_r$ passa per $M$.

*Segona sessió. 31 de Març de 2000.*

**36E4.** Trobeu l'enter més gran $N$ que cumpleixi les condicions següents:
a) $E(N/3)$ té les tres xifres iguals.
b) $E(N/3)$ és suma de nombres naturals consecutius a partir de 1, és a dir, existeix un natural $n$ tal que

$$E(N/3) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

*Nota:* $E(x)$ és la part entera de $x$.

**36E5.** Considerem quatre punts situats a l'interior o la frontera d'un quadrat de costat 1. Demostreu que al menys dos d'ells estan a una distància menor o igual que 1.

**36E6.** Demostreu que no existeix cap funció $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumpleixi

$$f\big(f(n)\big) = n + 1.$$

---

**Guanyadors:** Carlos Gómez Rodríguez, Luis Emilio García Martínez, Alberto Suárez Real, José María Cantarero López, Manuel Pérez Molina, Roberto Rubio Núñez.

*Primera sessió. 15 de Desembre de 2000, de 16 h a 20 h.*

**37C1.** Considerem una circumferència de radi $r$ i una recta $l$ tangent a la circumferència en un punt $P$. Des d'un punt $R$, mòbil sobre la circumferència, tracem la perpendicular a la recta $l$ i anomenem $Q$ el punt d'intersecció de les dues rectes. Determineu l'àrea màxima que pot assolir el triangle $PQR$.

**37C2.** Trobeu nombres enters positius $n$ i $a_1, a_2, \dots, a_n$ tals que $a_1+a_2+\cdots+a_n = 2000$ i que el producte $a_1a_2\dots a_n$ sigui el més gran possible.

**37C3.** Donada una funció $f(x)$, s'anomena *punt fix* de $f$ tota solució (real) de l'equació $f(x) = x$. Calculeu, en funció del paràmetre $r > 0$, els punts fixos de les funcions $f(x)$ i $g(x) = f\bigl(f(x)\bigr)$ si $f(x) = rx(1-x), x \in [0,1]$. Representeu gràficament el conjunt

$$\{(r, x_r) \in (0,\infty) \times [0,1] \bigm| x_r \text{ és un punt fix de } f \text{ o de } g\}.$$

**37C4.** Busqueu el mínim nombre natural $n > 0$ tal que $n/2$ sigui un quadrat, $n/3$ sigui un cub, i $n/7$ sigui una potència setena.

*Segona sessió. 16 de Desembre de 2000, de 9 h a 13 h.*

**37C5.** Tres atletes, $A$, $B$ i $C$, competeixen en una sèrie de proves. Per quedar en primera posició en una prova, l'atleta rep $x$ punts; per quedar en segona, $y$ punts; i per quedar en tercera posició $z$ punts. No hi ha possibilitat d'empat, i els nombres $x$, $y$, $z$ són naturals tals que $x > y > z$. En acabar, $A$ ha acumulat 20 punts, $B$ 10 punts i $C$ 9 punts. L'atleta $A$ ha quedat segon en la prova de llançament de pes. Qui ha quedat segon a la prova de carrera curta?

**37C6.** Hi ha dos triangles rectangles no semblants, cada un dels quals té un costat igual al costat d'un triangle equilàter i l'àrea $\alpha$ vegades l'àrea d'aquest triangle equilàter. Què podem dir del nombre $\alpha$?

**37C7.** S'anomenen *nombres triangulars* els nombres naturals $n$ de la forma

$$n = \frac{k(k+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + k, \text{ amb } k \in \mathbb{N}.$$

a) Demostreu que si $n$ és un nombre triangular, aleshores $9n + 1$ també ho és.
b) Determineu els valors dels nombres naturals $a$ i $b$ per tal que $an + b$ sigui triangular sempre que $n$ sigui triangular.

**37C8.** Un dipòsit cònic amb el vèrtex a la part inferior, d'altura $h$ i angle en el vèrtex $2\alpha < \pi$, és ple d'aigua fins a vessar. S'introdueix al dipòsit, amb compte, una esfera de radi $r$ més densa que l'aigua. Dibuixeu la gràfica de la funció que expressa, en funció de $r > 0$, el volum d'aigua que es vessarà. En particular, determineu el valor de $r$ per al qual serà més gran el mullader.
*Nota:* El volum d'un casquet esfèric (cada una de les parts en què un pla divideix una esfera) és igual a

$$\pi a^2 \left( r - \frac{a}{3} \right)$$

on $r$ és el radi de l'esfera i $a$ l'altura del casquet $(0 \le a \le 2r)$.

---

**Guanyadors:** Maria Saumell Mendiola, Francesc Fité Naya, Miquel Oliu Barton, Martí Prats Soler, Roc Maymó Camps, Artur Latorre Musoll, Sergio Millán López, Joaquim Cevallos Morales, Pedro Valero Lanau.

*Primera sessió. 23 de Març de 2001.*

**37E1.** Demostreu que el gràfic del polinomi $P(x)$ és simètric respecte del punt $A(a,b)$ si i només si existeix un polinomi $Q(x)$ tal que

$$P(x) = b + (x-a)\,Q\Big((x-a)^2\Big).$$

**37E2.** Sigui $P$ un punt a l'interior del triangle $ABC$, de manera que el triangle $ABP$ compleix

$$AP = BP.$$

Sobre cada un dels altres costats de $ABC$ es construeixen exteriorment triangles $BQC$ i $CRA$, tots dos semblants al triangle $ABP$ i que compleixen:

$$BQ = QC \quad \text{i} \quad CR = RA.$$

Demostreu que els punts $P$, $Q$, $C$ i $R$ són els vèrtexs d'un paral·lelogram.

**37E3.** Tenim cinc segments de longituds $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ i $a_5$ tals que amb tres qualssevol d'ells es pot construir un triangle.
Demostreu que al menys un d'aquests triangles té tots els angles aguts.

*Segona sessió. 24 de Març de 2001.*

**37E4.** Els nombres enters des de 1 fins a 9 es distribueixen a les caselles d'una taula $3 \times 3$. Després se sumen sis nombres de tres xifres: els tres que es llegeixen en files d'esquerra a dreta i els tres que es llegeixen en columnes de dalt a baix.
Hi ha alguna disposició per a la qual el valor d'aquesta suma sigui 2001?

**37E5.** Sigui $ABCD$ un quadrilàter inscrit en una circumferència de radi 1 de manera que $AB$ és un diàmetre i el quadrilàter admet circumferència inscrita.
Demostreu que $CD \leq 2\sqrt{5} - 4$.

**37E6.** Determineu la funció $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (essent $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunt dels nombres naturals) que cumpleix, per a qualssevol $s, n \in \mathbb{N}$, les condicions següents:
$f(1) = f(2^s) = 1$ i si $n < 2^s$, aleshores $f(2^s + n) = f(n) + 1$.
Calculeu el valor màxim de $f(n)$ quan $n \leq 2001$.
Trobeu el menor nombre natural $n$ tal que $f(n) = 2001$.

---

**Guanyadors:** Javier Cóppola Rodríguez, Martí Prats Soler, Luis Hernández Corbato, Sergio Millán López, Ignacio Cascudo Pueyo, Miquel Oliu Barton.

*Primera sessió. 14 de Desembre de 2001, de 16 h a 20 h.*

**38C1.** Trobeu tots els polinomis $p(x)$ tals que $p(x^2) = \big(p(x)\big)^2$.

**38C2.** Un rectangle de costats 20 cm i 15 cm té un vèrtex situat en el centre d'una circumferència i el vèrtex oposat situat sobre la circumferència. Calculeu la longitud de la corda que passa pels altres dos vèrtexs del rectangle.

**38C3.** Esbrineu si en el conjunt de nombres $\{1, 2, 3, \ldots, 10^9\}$ n'hi ha més que contenen la xifra 9 o més que no la contenen.

**38C4.** Trobeu el mínim nombre natural $n$ que és múltiple de 3 i tal que, a més, $n+1$ és múltiple de 5, $n+2$ és múltiple de 7, $n+3$ és múltiple de 9, i $n+4$ és múltiple de 11.

*Segona sessió. 15 de Desembre de 2001, de 9 h a 13 h.*

**38C5.** Demostreu que si $x$ i $y$ són dos nombres reals tals que $\sin x - \sin y = x - y$, llavors necessàriament $x = y$.

**38C6.** a) Demostreu que, en qualsevol triangle, el perímetre $P$ del triangle, l'àrea $S$ del triangle i el radi $r$ del cercle inscrit satisfan $r\dot{P} = 2S$.
b) D'entre tots els triangles de base 1 i altura 1, determineu quin té el cercle inscrit d'àrea màxima i calculeu l'àrea d'aquest cercle.

**38C7.** Tenim unes partícules sobre la recta que cada any esclaten, totes alhora, i cadascuna d'elles es converteix en dues que van a parar a un costat i l'altre, a un metre de distància de la que ha esclatat. Quan a un mateix punt hi van a parar dues partícules, es destrueixen i desapareixen. Si a l'any 0 només hi havia una partícula, situada en el punt 0 de la recta, quantes partícules hi haurà l'any 2001, després que hagin esclatat?

**38C8.** a) Tenim un cub i pintem a l'atzar 3 cares de color vermell i 3 cares de color groc. Calculeu la probabilitat que les tres cares de color vermell tinguin un vèrtex en comú.
b) Tenim 8 cubs de la mateixa mida, cadascun pintat a l'atzar amb tres cares de color vermell i tres cares de color groc. Els col·loquem aleatòriament, de manera que formin un cub més gros. Quina és la probabilitat que totes les cares exteriors d'aquest cub siguin del mateix color?
c) I si ho fem amb 27 cubs?

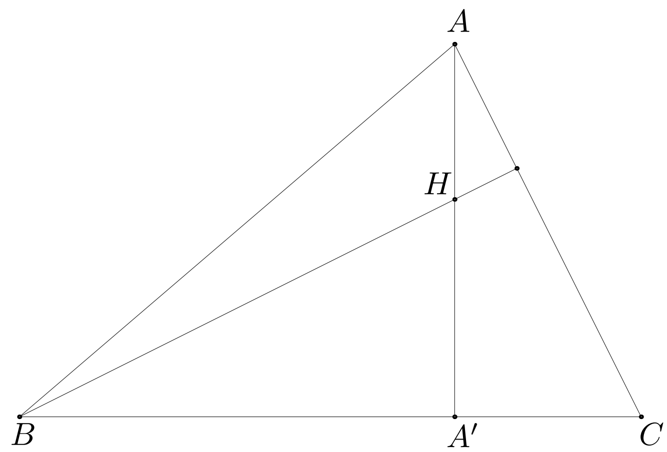
---

**Guanyadors:** Sergio Millán López, Pau Curell Sanmartí, Daniel Rodrigo López, Elsa de Alfonso Prieto-Puga, Albert Llorens Martínez, Patricia Ceballos Carrascosa, Raül Vinyes Raso, Ignasi Abío Roig, Anna Papió Toda.

*Primera sessió. 5 d'Abril de 2002.*

**38E1.** Trobeu tots els polinomis $P(t)$ d'una variable que cumpleixen $P(x^2-y^2) = P(x+y)\,P(x-y)$ per a tots els nombres reals $x$ i $y$.

**38E2.** En un triangle $ABC$, el punt $A'$ és el peu de l'altura relativa al vèrtex $A$, i $H$ és l'ortocentre.
a) Donat un nombre real positiu $k$ tal que $k = \dfrac{AA'}{HA'}$, trobeu la relació entre els angles $B$ i $C$ en funció de $k$.
b) Si $B$ i $C$ són fixos, trobeu el lloc geomètric del vèrtex $A$ per a cada valor de $k$.




**38E3.** La funció $g$ es defineix sobre els nombres naturals i satisfà les condicions:

$$g(2) = 1$$
$$g(2n) = g(n)$$
$$g(2n+1) = g(2n) + 1.$$

Sigui $n$ un nombre natural tal que $1 \leq n \leq 2002$. Calculeu el valor màxim $M$ de $g(n)$. Calculeu també quants valors de $n$ satisfan la condició $g(n) = M$.

*Segona sessió. 6 d'Abril de 2002.*

**38E4.** Sigui $n$ un nombre natural, i $m$ el que resulta escrivint en ordre invers les xifres de $n$. Determineu, si existeixen, els nombres de tres xifres que compleixen $2m+S=n$, essent $S$ la suma de les xifres de $n$.

**38E5.** Es consideren 2002 segments en el pla, tals que la suma de llurs longituds és la unitat. Demostreu que existeix una recta $r$ tal que la suma de les longituds de les projeccions dels 2002 segments donats sobre $r$ és menor que $2/3$.

**38E6.** En un polígon regular $H$ de $6n+1$ costats ($n$ és un enter positiu), pintem $r$ vèrtexs de color vermell, i la resta els pintem de blau. Demostreu que el nombre de triangles isòsceles que tenen els tres vèrtexs del mateix color no depèn de la manera de distribuir els colors en els vèrtexs de $H$.

---

**Guanyadors:** Daniel Rodrigo López, Luis Hernández Corbato, Sergio Millán López, David García Soriano, Susana Ladra González, José Miguel Manzano Prego.

*Primera sessió. 13 de Desembre de 2002, de 16 h a 20 h.*

**39C1.** Amb dues lletres, $a$, $b$ formem les infinites paraules que tenen un nombre finit de lletres, i les ordenem alfabèticament.
a) Quines paraules tenen una paraula immediata posterior?
b) Quines paraules tenen una paraula immediata anterior?
c) Demostreu que si una paraula $p_1$ és anterior a una paraula $p_2$, i $p_2$ acaba en $b$, aleshores entre $p_1$ i $p_2$ hi ha paraules acabades en $a$ i paraules acabades en $b$.

**39C2.** En el pla tenim una recta $r$, un punt $P$ sobre $r$ i un punt $Q$ fora de la recta $r$. Per cada punt $R$ de $r$ considerem el nombre

$$\lambda = \frac{PR + PQ}{QR}.$$

a) Busqueu els valors màxim i mínim del nombre $\lambda$ i digueu on ha d'estar situat el punt $R$ per obtenir aquest màxim i aquest mínim.
b) A quin valor tendeix $\lambda$ quan $R$ tendeix cap a l'infinit?

**39C3.** Cinc pirates van arribar a una illa deserta i van decidir amagar els seus tresors en un terreny pla on hi havia els cinc arbres més alts de l'illa. Van cavar cinc forats en els vèrtexs d'un pentàgon (convex i no regular). En el punt mitjà de cada costat del pentàgon hi havia un dels cinc arbres. Sobre cada sot hi van plantar un roser.
Quan van tornar a l'illa, per recuperar els tresors no hi havia cap roser. La sequera va marcir els primers brots... Només hi havia els cinc arbres...
Un dels pirates, que recordava coses que havia après de jove, els va dir: No us preocupeu. Recuperarem els tresors!
Va recordar:
a) Donats els punts mitjans dels costats d'un triangle, es poden recuperar els seus vèrtexs.
b) Si coneixem els punts mitjans de tres costats d'un quadrilàter, podem trobar el punt mitjà del quart costat.
Raoneu la resposta positiva als apartats a) i b). Digueu com van recuperar els pirates el seu tresor, coneixent la resposta positiva de a) i b).

**39C4.** En el pla considerem una circumferència i un punt exterior $P$. Des de $P$ es dibuixen dues rectes tangents a la circumferència en punts $A$ i $B$. En l'arc més petit

$AB$ es considera un punt $T$ i es dibuixa una altra recta tangent per $T$ que talla $PA$ i $PB$ en punts $Q$ i $R$, respectivament.
Determineu el perímetre del triangle $PQR$ en funció de $PA$.

*Segona sessió. 14 de Desembre de 2002, de 9 h a 13 h.*

**39C5.** Considereu dos polígons regulars de $n$ costats de longitud $a$, iguals i superposats. Un d'ells es gira un angle $\pi/n$ radians respecte d'un eix perpendicular al pla que els conté i que passa pel centre dels polígons, i tot seguit, es desplaça paral·lelament segons la direcció de l'eix de gir. A quina distància cal desplaçar el polígon per tal que en unir cada vèrtex d'un amb els dos vèrtexs més propers de l'altre, s'obtinguin com a cares laterals triangles equilàters?

**39C6.** Esbrineu per a quins punts de l'eix d'una paràbola es poden traçar el màxim nombre possible de normals a la paràbola. Comproveu que la distància d'aquests punts al vèrtex és més gran que la distància d'aquests punts als peus de les altres normals.

**39C7.** Sigui $ABC$ un triangle.
a) Determineu els punts $P$ del pla que compleixen

$$\text{Àrea}(PAB) = \text{Àrea}(PBC) = \text{Àrea}(PCA) \qquad (*).$$

b) Sigui $P$ un punt interior del triangle que compleixi $(*)$, i siguin $P_1$, $P_2$, $P_3$ els punts interiors als triangles $PBC$, $PCA$, $PAB$ en les mateixes condicions. Determineu l'àrea del triangle $P_1P_2P_3$ en funció de l'àrea del triangle $ABC$.

**39C8.** Un jugador de tenis vol enfrontar-se a dos rivals $A$ i $B$ per adquirir prestigi amb bons resultats. La probabilitat de guanyar al jugador $A$ és més petita que la de guanyar a $B$ perquè el primer és de més categoria. Li ofereixen tres partits, dels quals n'ha de guanyar al menys dos de seguits, i pot triar la seqüència dels contraris: o bé $A-B-A$, o bé $B-A-B$.
Quina seqüència de partits li és més favorable?

---

**Guanyadors:** Daniel Rodrigo López, Joaquim Serra Montolí, Matías Javier Wartelski Pryluka, Carles Sala Cladellas, Xavier Roca Artola, Anna Sabaté Vidales, Arnau Padrol Sureda, Carles Solano Molins.

*Primera sessió. 2 de Març de 2003.*

**39E1.** Demostreu que per a qualsevol primer $p$ diferent de 2 i 5 existeix un múltiple de $p$ que té totes les xifres iguals a 9. Per exemple si $p = 13$, $999999 = 13 \cdot 76923$.

**39E2.**
Existeix algun conjunt finit de nombres reals $M$ que contingui al menys dos elements diferents i que compleixi la propietat que per dos nombres $a$, $b$ qualssevol de $M$, el nombre $2a - b^2$ sigui també un element de $M$?

**39E3.** Les altures del triangle $ABC$ es tallen en el punt $H$. Se sap que $AB = CH$. Determineu el valor de l'angle $\widehat{BCA}$.

*Segona sessió. 3 de Març de 2003.*

**39E4.** Sigui $x$ un nombre real tal que $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Demostreu que tant $x$ com $x^2$ són irracionals.

**39E5.** Quines són les possibles àrees d'un hexàgon amb tots els angles iguals i amb costats que mesuren 1, 2, 3, 4, 5 i 6, en algun ordre?

**39E6.** Enfilem $2n$ boles blanques i $2n$ boles negres formant una cadena oberta. Demostreu que, es faci en l'ordre que es faci, sempre és possible tallar un segment de cadena exactament amb $n$ boles blanques i $n$ boles negres.

---

**Guanyadors:** Daniel Rodrigo López, Luis Hernández Corbato, Mohammed Blanca Ruiz, Víctor González Alonso, Javier Gómez Serrano, Maite Peña Alcaraz

*Primera sessió. 12 de Desembre de 2003, de 16 h a 20 h.*

**40C1.** Donat un triangle $ABC$, es busca un punt $P$, interior al triangle, tal que els seus punts simètrics respecte dels costats del triangle, $P_a$, $P_b$ i $P_c$, siguin vèrtexs d'un triangle equilàter.
a) Quines condicions ha de complir el triangle $ABC$ perquè hi hagi solució?
b) Si es compleixen aquestes condicions, com trobariem el punt $P$?

**40C2.** Resoleu els sistema d'equacions

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 - \frac{1}{2}(x_2 + x_3 + \cdots + x_n) \\ x_2 &= a_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + \cdots + x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= a_n - \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) \end{aligned}$$

**40C3.** Trobeu el centre i el radi de la circumferència que intercepta sobre cada costat d'un triangle donat segments iguals al radi.

**40C4.** Direm que un nombre natural és *consecutivable* quan es pugui expressar com a suma de nombres naturals consecutius. Així, $9 = 2 + 3 + 4$ és *consecutivable* mentre que 2 i 4 no ho són. Quins són els nombres naturals *consecutivables*?

*Segona sessió. 15 de Desembre de 2001, de 9 h a 13 h.*

**40C5.** Amb dos colors, blau i groc, s'han de pintar els pisos d'un gratacel, cada pis d'un color. L'única limitació és que dos pisos consecutius no poden pintar-se de groc. De quantes maneres es pot aconseguir això si el gratacel té 15 pisos? I si en té 2003? (Trobeu una expressió que ens permeti calcular-les d'alguna manera).

**40C6.** Efectueu la divisió entera

$$2003^{2003} \;\; \underline{\big|\; 2004 \;}$$

**40C7.** Donat un segment $AB$ de longitud 8 m, trobeu el lloc geomètric dels baricentres dels triangles de base $AB$, els perímetre dels quals amida 18 m.

**40C8.** Descriviu els políedres convexos de 6 vèrtexs.

---

**Guanyadors:** Joaquim Serra Montolí, Albert Aguadé Borrull, Maria Ibáñez Alonso, Guillermo Vilaplana Muller, Nelson Robert Fiallos Masó, Ainhoa Mantarola Solans, Miguel Teixidó Román, Enric Martínez Sala, Alberto Camacho Martínez.

*Primera sessió. 26 de Març de 2004.*

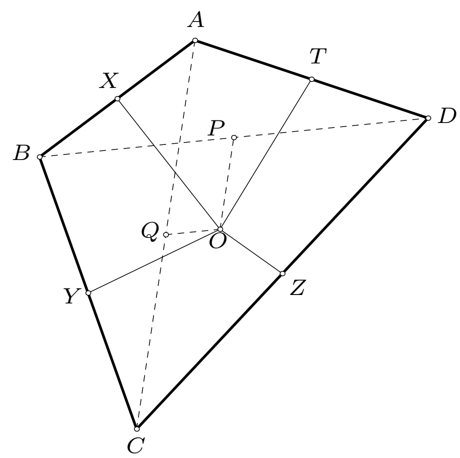
**40E1.** Tenim un conjunt de 221 nombres reals la suma dels quals és 110721. Els disposem formant un rectangle de manera que totes les files i la primera i última columna siguin progressiones aritmètiques de més d'un element. Demostreu que la suma dels elements dels quatre cantons val 2004.

**40E2.**

$ABCD$ és un quadrilàter qualsevol, $P$ i $Q$ els punts mitjans de les diagonals $BD$ i $AC$, respectivament. Les paral·leles per $P$ i $Q$ a l'altra diagonal es tallen al punt $O$.

Si unim $O$ amb els quatre punts mitjans dels costats $X$, $Y$, $Z$ y $T$, es formen quatre quadrilàters, $OXBY$, $OYCZ$, $OZDT$ i $OTAX$.

Demostreu que els quatre quadrilàters tenen la mateixa àrea.




**40E3.** Es representa per $\mathbb{Z}$ el conjunt de tots els enters. Trobeu totes les funcions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tals que per qualssevol $x$, $y$ enters es compleixi:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y.$$

*Segona sessió. 27 de Març de 2004.*

**40E4.** Existeix alguna potència de 2 que en escriure-la en el sistema decimal tingui tots els seus dígits diferents de zero i sigui possible reordenar-los per formar amb ells una altra potència de 2?. Justifiqueu la resposta.

**40E5.** Demostreu que la condició necessària i suficient per tal que, en el triangle $ABC$, la mitjana desde $B$ sigui dividida en tres parts iguals per la circumferència inscrita al triangle, és

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{10} = \frac{c}{13}\,.$$

**40E6.** Col·loquem, formant una circumferència, 2004 fitxes bicolors: blanques per una cara i negres por l'altra. Un moviment consisteix a elegir una fitxa *negra*, i donar la volta a tres fitxes: l'elegida, la de la seva dreta i la de la seva esquerra. Suposem que inicialment hi ha una sola ftxa amb la cara negra cap amunt. Serà possible, repetint el moviment descrit, conseguir que totes les fitxes tinguin la cara blanca cap amunt? I si tinguéssim 2003 fitxes, entre les quals exactament una té al començament la cara negra cap amunt?

---

**Guanyadors:** Joaquim Serra Montolí, Maite Peña Alcaraz, Elisa Lorenzo García, Miguel Teixidó Román, Francisco J. Hernández Heras, María Isabel Cordero Marcos.

# ÍNDEX DE GUANYADORS